



ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS INDUSTRIALES Y DE TELECOMUNICACIÓN

Titulación:

INGENIERO INDUSTRIAL

Título del proyecto:

CARACTERIZACIÓN Y CONTROL DEL REGULADOR DE
WATT

Isabel Carrillo Salagre

Iñaki Arocena Elorza

Gabriel Lera Cabrerías

Pamplona, 12 de Noviembre del 2010

1. ÍNDICE

1. ÍNDICE	1
2. INTRODUCCIÓN	2
3. ANTECEDENTES Y OBJETIVOS	3
3.1. ANTECEDENTES	3
3.2. OBJETIVOS	10
4. DESARROLLO DEL TRABAJO	12
4.1. ECUACIONES DEL SISTEMA	12
4.2. LINEALIZACIÓN DE LAS ECUACIONES DEL SISTEMA	15
4.2.1. Rozamiento en el pasador	16
4.2.2. Rozamiento en la articulación	18
4.3. SIMULACIÓN DEL REGULADOR CON MATLAB	21
4.3.1. Introducción	21
4.3.2. Simulaciones	25
4.3.3. Resumen de conclusiones	36
4.4. CONSTRUCCIÓN Y ESTUDIO DEL REGULADOR	38
4.4.1. Construcción del regulador	38
4.4.2. Simulación con datos del regulador	40
4.4.3. Regulador de Watt en lazo abierto	44
4.5. APLICACIÓN DEL REGULADOR DE WATT A UN MOTOR	48
4.5.1. El motor	48
4.5.1.1. Experimento nº 1	51
4.5.1.2. Experimento nº 2	53
4.5.1.3. Experimento nº 3	54
4.5.2. Acoplamiento del regulador al motor	54
5. ANÁLISIS DE RESULTADOS	62
5.1. COMPORTAMIENTO EN ESTADO ESTACIONARIO	62
5.2. RESPUESTA DEL REGULADOR FRENTE A PERTURBACIÓN	64
5.3. CONTROL PROPORCIONAL	70
6. CONCLUSIONES	72
7. BIBLIOGRAFÍA	75
ANEXO 1	I
ANEXO 2	XI

2. INTRODUCCIÓN

El propósito de este proyecto es hacer un análisis detallado del Regulador de Watt, esta idea surge debido al gran interés histórico que supuso dicho regulador durante la Revolución Industrial. Este mecanismo es un tipo específico de regulador que controla la velocidad de un motor limitando la cantidad de combustible que entra, esto permite mantener aproximadamente constante la velocidad, sean cuales sean las condiciones de carga o suministro.



Figura 1: Símbolo de los Ingenieros Industriales

En aquella época no existía el avance tecnológico del que disponemos hoy en día y por tanto, todas las conclusiones a las que se llegaban eran de forma totalmente empírica, no tenían forma de resolver numéricamente aquello que ocurría, sino que mediante la realización de experimentos extraían conclusiones. En este sentido, surge la idea de simular las ecuaciones que rigen este sistema, comprobar qué es lo que realmente ocurre de una forma teórica y compararlo con los resultados experimentales.

Desde un punto de vista didáctico, se plantea fabricar un modelo del Regulador de Watt. En la actualidad, los alumnos que realizan prácticas de control manejan los controladores mediante un software determinado, dónde modifican unos parámetros y obtienen unos resultados, de esta forma eléctrica no acaban de comprender su funcionamiento. El objetivo de la construcción del regulador es mostrar físicamente en qué consiste, cómo actúa y cuál es su función.

Otro de los propósitos de este proyecto es conocer cómo se comporta el Regulador de Watt según las teorías del control moderno, es decir, qué tipo de control realiza. Según la bibliografía consultada equivale a un control proporcional, hecho que será contrastado.

3. ANTECEDENTES Y OBJETIVOS

3.1. ANTECEDENTES

Remontándonos a la Edad Media, la primera motivación para el control en aquella época fue la necesidad de determinar con precisión el tiempo, con la evolución de los relojes mecánicos empezaron los esfuerzos por desarrollar reguladores de velocidad.

Con la revolución industrial, las dos principales fuentes de energía: viento y agua, fueron complementadas por una tercera: la máquina de vapor. Al principio ésta chocó con la falta de personal cualificado, de técnicas de construcción y de materiales adecuados, tan sólo era usada para bombear agua en alguna fuente y para achicar el agua acumulada en las inundadas minas de carbón inglesas.

Las máquinas de vapor, al igual que los molinos para moler el grano, los hornos y las calderas de la época sufrían variaciones en la presión del vapor o en la carga, pero no podían ser reguladas a mano eficientemente, y de ahí surgió la necesidad de desarrollar sistemas de control automático adecuados.

A pesar de la creciente importancia del motor de vapor, las principales fuentes de energía durante el siglo XVIII fueron la rueda hidráulica y el molino de viento. De estas dos fuentes de energía, la última era la que más variabilidad tenía, ya que dependía de la dirección y de la fuerza del viento. Debido a estos problemas se diseñaron varios sistemas de retroalimentación para asegurar el movimiento uniforme del molino. Uno de los primeros que fueron desarrollados fue el Fantail o ventilador de cola, patentado por Edmund Lee en 1745. El Fantail consiste en un pequeño ventilador de cola, montado en perpendicular al rotor principal del molino que hace girar la cúpula del mismo, de forma que el eje del rotor principal quede alineado con el viento.



Figura 2: Fantail
(www.esi2.us.es/ISA/GAR/)

El mecanismo que utilizaban en los molinos para triturar el grano constaba de dos piedras redondas enfrentadas, la de abajo era fija, se denominaba solera y la de arriba llamada volandera, giraba con respecto a la anterior. La calidad de la harina dependía de dos factores: la separación entre las piedras y la velocidad de rotación de la volandera. La principal preocupación de los trabajadores de los molinos no era que ésta alcanzara una determinada velocidad, sino intentar mantener la separación adecuada entre ambas ruedas. Un incremento de la velocidad hacía que la volandera subiera, variando el grado de molienda de la harina, por ello cuando había ráfagas de viento, el molinero debía estar ajustando la separación continuamente.

Thomas Mead inventó y patentó, en 1787, un diseño que combinaba la solución de los dos problemas, consistía en un péndulo centrífugo, la altura de las bolas dependía de la velocidad del molino y, mediante palancas, se transmitía el movimiento producido. Así se aseguraba que la presión ejercida entre las piedras del molino fuera proporcional a la velocidad de rotación.

Este se combinaba con otro ingenio que controlaba la velocidad del molino: un regulador basado en un nuevo principio para molinos de viento u otros, que mejoraba el pliegue y despliegue de las velas sin la constante atención de un hombre. Este regulador se muestra en la Figura 3. El movimiento vertical de las bolas hace mover un collar situado en el eje principal, el cual está conectado directamente con el mecanismo de pliegue de las velas. Cuando la velocidad es cero las velas están totalmente desplegadas y conforme la velocidad se incrementa, la fuerza centrífuga aumenta y hace que las velas se plieguen.

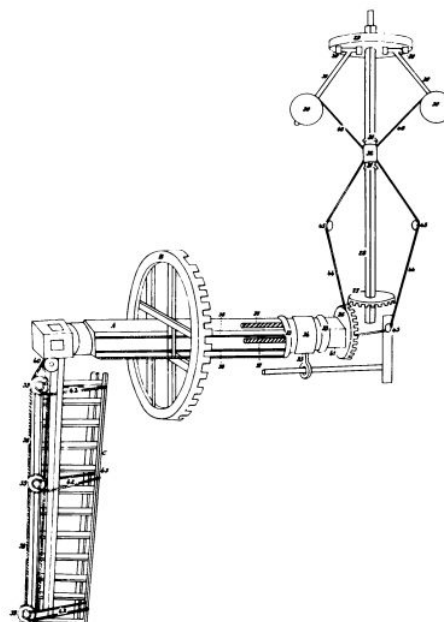


Figura 3: Regulador de Mead
(www.answers.com/topic/history-of-cybernetics)

Durante la década de 1780, Boulton y Watt quisieron promocionar el motor de vapor y por ello decidieron construir un molino de harina que funcionase con la ayuda de una máquina de vapor, era conocido como Molino de Albion y estaba situado en Londres. Para supervisar la construcción del mismo, contrataron a John Rennie, un joven constructor de molinos que acababa de finalizar su aprendizaje con Andrew Meikle, un famoso constructor de molinos escocés.



Figura 4: James Watt (Wikipedia)

John Rennie instaló un péndulo centrífugo en el Molino de Albion que detectaba la velocidad del mismo y presionaba hacia abajo las piedras para mantener constante el espaciado entre las ruedas y asegurar una molienda fina. Se debe remarcar que la invención de los reguladores centrífugos se le ha atribuido desde siempre a Meikle, el cual era el líder en el diseño e implantación de molinos, pero Meikle basó los diseños de sus reguladores centrífugos en el ingenio patentado por Mead en 1787.

Con el Molino de Albion consiguieron publicidad, sin embargo, Watt no estaba demasiado contento: “Me ha dolido escuchar a numerosas personas admitir que el Molino de Albion es simplemente un objeto curioso”, le escribió a Boulton en una carta en 1786. Como producto comercial fue un desastre, Boulton y Watt perdieron mucho dinero, pero gracias a esta experiencia surgieron nuevas ideas.

En mayo de 1788, debido a unos problemas técnicos, Boulton tuvo que ir a Londres y mientras estuvo allí, vio las mejoras que John Rennie había hecho en la maquinaria del molino. Escribió una carta a Watt en la que le describió un mecanismo centrífugo con dos pesos que subían y bajaban en función de la velocidad del molino.

Watt se dio cuenta de que el péndulo centrífugo podría servir como un medio para controlar de forma directa la velocidad de la máquina de vapor. Todo lo que tenían que hacer era aplicar la salida del péndulo a la presión de entrada de los pistones a través de la válvula de entrada. Así empezó a trabajar en el diseño del “Fly-ball” o también

denominado, Regulador de Watt. Sin embargo, Watt nunca reclamó la invención del regulador centrífugo ya que era usado desde el siglo XVII para otros propósitos. En realidad, que él sea el inventor de este dispositivo forma parte de un malentendido.

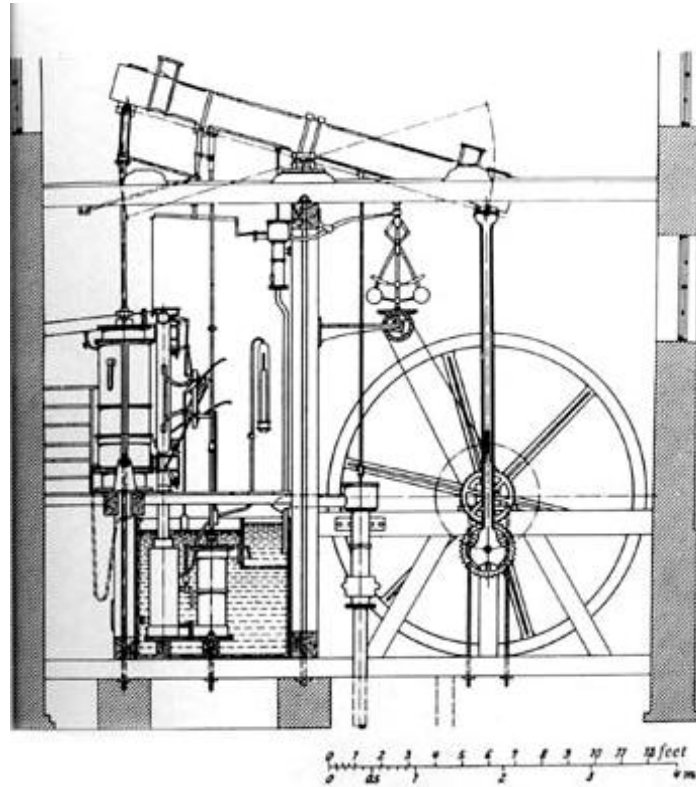


Figura 5: Máquina de vapor con Regulador de Watt
(www.automata.cps.unizar.es)

Watt y Boulton no anunciaron su hallazgo, no tenían intención de patentarlo, trataron de llevarlo en secreto el mayor tiempo posible, hasta que en 1798 la primera descripción del regulador centrífugo fue publicada en el “Nicholson’s Journal”. Más tarde, se haría de dominio público y se convertiría en una parte clave de los ingenios de vapor de la época.

Los dispositivos de control o realimentación utilizados hasta entonces permanecían como secundarios. Sin embargo, el principio de funcionamiento del péndulo centrífugo fue todo un éxito y se convirtió en el símbolo de la nueva era industrial. Fue el primer uso del control por realimentación o feedback que tuvo un conocimiento popular y extendido.

El regulador se compone de dos o más masas en rotación alrededor de un eje giratorio, debido a la fuerza centrífuga las masas tienden a alejarse del eje de rotación. Por otro lado, un sistema de palanca transforma el movimiento radial de las masas en deslizamiento axial sobre un collar, movimiento que es trasladado para abrir o cerrar la válvula de paso de vapor o de combustible. En la Figura 6 se puede observar el péndulo de Watt en detalle.

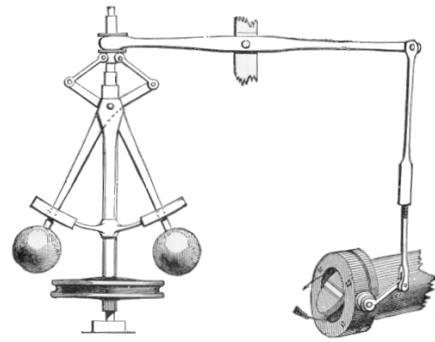


Figura 6: Regulador de Watt (Wikipedia)

El acoplamiento del regulador con el motor de vapor y su entrada de alimentación se muestra en la Figura 7. La energía suministrada al regulador proviene del eje de salida del motor mediante una cadena conectada a la rueda inferior, esta conexión puede ser mediante una correa (Figura 6) o mediante ruedas dentadas (Figura 7).

El regulador está conectado a una válvula de mariposa que regula el flujo de fluido de trabajo (vapor). Conforme la velocidad aumenta, el eje central del regulador gira a un ritmo más rápido y la energía cinética de las bolas se incrementa. Esto permite que las dos masas se muevan hacia fuera y hacia arriba contra la gravedad. El movimiento lineal producido por los brazos que sustentan dichas masas, se utiliza para regular la apertura de la válvula de mariposa mediante un sistema de palanca, reduciendo o aumentando el caudal que entra al motor y por tanto su velocidad.

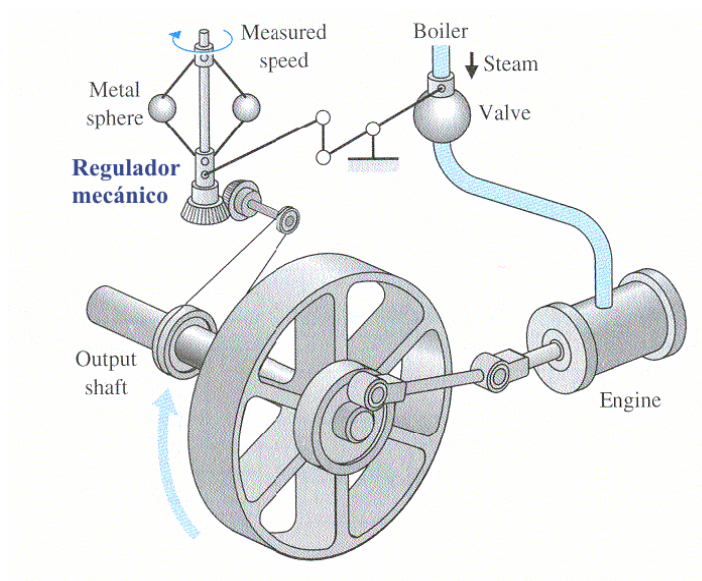


Figura 7: Regulador (www.tallerelectrico.es)

Los primeros reguladores de Watt funcionaron satisfactoriamente, esto fue debido al considerable rozamiento que presentaban sus mecanismos, haciendo así el péndulo estable. Suministraban una acción de tipo proporcional y el control de velocidad solo era exacto con una determinada carga mecánica. Además, solo podían operar en un rango de velocidades muy reducido y era necesario un continuo y costoso mantenimiento del mecanismo. Se acabaron denominando moderadores, en lugar de controladores.

Entre 1800 y 1870, una vez caducada la patente de Watt, fueron muchos los que intentaron mejorar el diseño de los reguladores, sobretodo con el objetivo de reducir el offset (una desviación permanente de la velocidad) presente en el invento de Watt.

Un ejemplo de estos ingenios fueron los reguladores o “Governors” patentados por los hermanos Siemens en 1846 y 1853, que sustituyeron la acción proporcional por acción integral.

Reconocieron dos fallos en el regulador de Watt. El primero era que no regulaba, sino que solo moderaba la velocidad del motor y el segundo, que era indiferente a la variación de la carga o la potencia. Con la ayuda del ingeniero Joseph Woods llegaron a la conclusión de que las fuerzas de rozamiento en la válvula y los acoplamientos podrían dar lugar a una oscilación permanente. Sin embargo, desconocían que este comportamiento era algo inherente del péndulo y que al reducir los rozamientos de los materiales con los que construían el regulador eliminaban el amortiguamiento.

Su Governor respondía rápidamente ante los cambios en la velocidad del motor, esto era a base de usar la potencia del motor para mover la válvula, así el regulador actuaba como un amplificador mecánico. Pero además de ser más rápido que el de Watt, el regulador Siemens eliminaba el offset. Esto fue gracias al uso de un mecanismo diferencial, compuesto por engranajes, para comparar la velocidad de referencia con la velocidad del motor. Este dispositivo, introducía acción integral ya que la comparación se hacía en términos de distancia recorrida y no de velocidad.

A mediados del siglo XIX habían cambiado las técnicas de diseño de las máquinas y se habían mejorado los procesos de fabricación, reduciendo considerablemente el

rozamiento presente en los primeros reguladores de Watt. A partir de ahí empezaron a observar que la velocidad de las máquinas variaba cíclicamente con el tiempo de forma no muy estable, estaban frente a un comportamiento pendular aunque ellos lo desconocían.

Este problema era bastante grave y atrajo a numerosos científicos e ingenieros de la época. Maxwell lo resolvió en 1868 con su trabajo llamado “On Governors”, el cual puede considerarse como el origen de la Teoría de Control. En él presenta su criterio de estabilidad para sistemas lineales dinámicos e invariantes y diferencia entre “Regulators” o “Moderators” (los que actualmente se denominan reguladores proporcionales) y “Governors” (reguladores con acción integral).

La contribución más importante que Maxwell realizó fue demostrar que el comportamiento de un sistema de control automático alrededor de un punto de equilibrio, se podía aproximar por una ecuación diferencial lineal y por lo tanto la estabilidad se podría discutir en términos de las raíces de la ecuación característica del sistema. A través de ella estudió el efecto de los parámetros del sistema sobre la estabilidad y demostró que un sistema es estable si las raíces tienen parte real negativa.

Más tarde, en 1877, Routh introdujo una técnica numérica para determinar si la ecuación característica tenía raíces estables.

3.2. OBJETIVOS

El primero de los objetivos de este proyecto es obtener el modelo matemático del regulador, es decir, las ecuaciones que rigen dicho sistema, esto se llevará a cabo a partir de las ecuaciones de Lagrange. Habrá que tomar como referencia un modelo simplificado del regulador que se aproxime al utilizado por Watt. La ecuación será no lineal, por lo que se realizará una linealización del sistema mediante las series de Taylor, de esta forma se obtendrá la función de transferencia.

Una vez obtenidas las ecuaciones, otro de los objetivos es realizar simulaciones mediante Matlab, con la herramienta Simulink, en las que variando ciertos parámetros del sistema como las masas, la longitud de los brazos o la velocidad angular, se puedan obtener conclusiones que sean de utilidad. Otro aspecto importante a la hora de simular es estudiar la influencia del rozamiento en el sistema.

Por otro lado, se pretende construir un regulador que pueda ser usado en las prácticas de control para que los alumnos comprendan físicamente en qué consiste un controlador. Debido al presupuesto económico del que se dispone, no es posible hacer uno con materiales de calidad. En el laboratorio se encuentran disponibles diversos packs de piezas LEGO, por lo que se plantea la idea de crear un regulador con dichas piezas, la construcción se realizará siguiendo un manual del profesor Remco Leine de la Universidad de Suiza¹.

Una vez construido el regulador, se analizará su comportamiento en lazo abierto y se estudiarán aspectos importantes del sistema, como el rozamiento, comparando los resultados empíricos y los teóricos.

El objetivo final del proyecto es acoplar el Regulador de Watt a un motor, y comprobar si realmente cumple su función de regular la velocidad del mismo. En el laboratorio no se dispone de un motor de vapor, pero sí de la maqueta CE7 de Control de Velocidad de un Motor. El sistema CE7 representa un motor de vapor impulsado por

¹ Remco Leine es profesor de la Universidad de Suiza, en IMES (Instituto de Sistemas Mecánicos), en concreto el trabajo al que se hace referencia en este proyecto es “The LEGO Watt Governor” que se encuentra ubicado dentro de los estudios sobre “Nonlinear dynamics with LEGO”.

aire comprimido a través de una válvula motorizada. Se usa aire comprimido en lugar de vapor, por motivos de seguridad.

Watt realizó un acoplamiento mecánico directo entre el regulador y el motor mediante unas levas que hacían mover la válvula de mariposa, sin embargo, en este caso, se realizará un acoplamiento eléctrico (más en la línea desarrollada por los hermanos Siemens y Joseph Woods pero con energía eléctrica), el regulador se conectará al motor eléctrico que permite abrir y cerrar la válvula de entrada de aire (electroválvula).

Por último, una vez que el sistema esté acoplado y se haya comprobado su funcionamiento, el Regulador de Watt será sustituido por un controlador proporcional digital introducido mediante Labview. Este experimento nos permitirá realizar un estudio comparativo del Regulador de Watt, supuestamente proporcional, con un controlador proporcional implementado con las técnicas de control actuales.

4. DESARROLLO DEL TRABAJO

El proyecto está dividido en cinco fases que se explican a continuación:

1. Análisis matemático y obtención de las ecuaciones del sistema.
2. Linealización de las ecuaciones del Regulador de Watt.
3. Simulación de las ecuaciones del sistema mediante la herramienta informática Simulink.
4. Creación de un regulador mediante piezas LEGOs y estudio de su comportamiento.
5. Acoplamiento del Regulador de Watt a un motor impulsado por aire comprimido para regular su velocidad.

4.1. ECUACIONES DEL SISTEMA

A la hora de realizar el estudio matemático del regulador partimos de un modelo simplificado que se aproxime al utilizado por Watt. La Figura 8 representa el regulador en el que se basarán todas las ecuaciones de este proyecto. Se consideran dos brazos de longitud l_1 unidos al eje por la articulación superior (a_1) y dos brazos de longitud l_2 articulados en el pasador (p) de masa m_2 . En los puntos que unen ambos brazos se sostienen dos masas, m_1 .

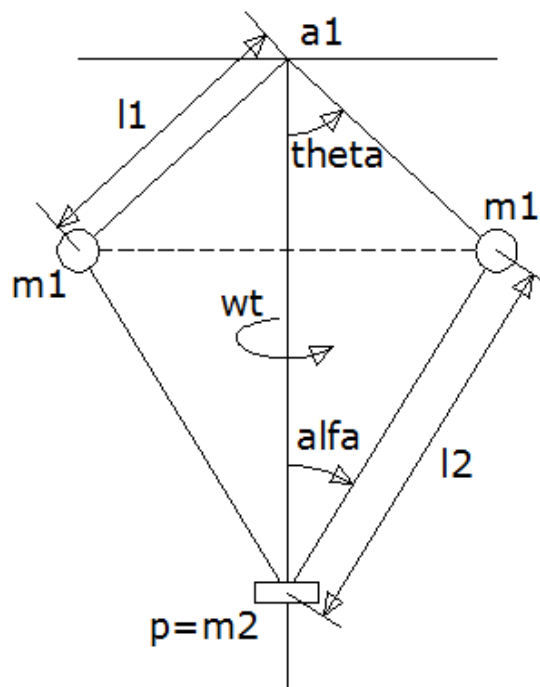


Figura 8: Modelo simplificado

En la estructura se observa un eje vertical, respecto al cual el regulador girará con una velocidad angular w . El ángulo que forma dicho eje con el brazo l_1 se denomina θ (theta en la figura), mientras que el formado con el brazo l_2 es α (alfa en la figura). En resumen, se podría considerar al regulador como un convertidor no lineal del movimiento de rotación en traslación.

Para obtener las ecuaciones del modelo se ha elegido el método de Lagrange frente a otros métodos alternativos debido a la sencillez de su planteamiento y posterior desarrollo. Los cálculos matemáticos están explicados detalladamente en el Anexo 1, del cual, en este caso se va a asumir para mayor simplicidad que las longitudes de los brazos l_1 y l_2 son iguales, hecho que se produce en la mayor parte de los reguladores y que implica que $\theta = \alpha$. En caso contrario las ecuaciones se complican escapándose del objetivo de este proyecto.

Para el modelo sin rozamiento, la aceleración angular viene dada por la siguiente ecuación:

$$\ddot{\theta} = \frac{\sin \theta \left[\cos \theta (m_1 \cdot w^2 - 2 \cdot m_2 \cdot \dot{\theta}^2) - \frac{g}{l} (m_1 + m_2) \right]}{m_1 + 2 \cdot m_2 (\sin \theta)^2} \quad \text{Ec. (4.1)}$$

Dónde: - θ es el ángulo que forma el brazo del regulador con el eje central.

- $\ddot{\theta}$ representa la aceleración angular.
- m_1 es la masa de una de las bolas.
- m_2 es la masa del pasador.
- w representa la velocidad de giro del regulador.
- g es la aceleración de la gravedad.
- l es la longitud de los brazos, asumiendo que $l_1 = l_2 = l$.

Se puede ver en la Ec. (4.1) que la aceleración angular depende de forma no lineal con la velocidad de giro del regulador.

Se sabe por la bibliografía² la importancia del rozamiento en el Regulador de Watt y por tanto se incluye en la ecuación el rozamiento lineal que se produce en las articulaciones, fijando como variable angular del sistema el ángulo θ , véase Figura 8. Desconocemos, sin embargo, el punto de rozamiento principal (si es que lo hay) y se han considerado dos puntos: la articulación a_I y el pasador, p , obteniéndose así dos modelos con rozamientos distintos.

Como es lógico existirá rozamiento en ambos puntos, pero de cara al análisis resultará más útil hacerlo por separado y así poder comparar los resultados sobre la influencia de cada uno de ellos.

Considerando primero el rozamiento en la articulación a_I , se agrega a la ecuación un término lineal dependiente de la velocidad angular que reste energía al sistema. La ecuación obtenida con la incorporación del rozamiento propuesto es:

$$\ddot{\theta} = \frac{\sin \theta \left[\cos \theta (m_1 \cdot w^2 - 2 \cdot m_2 \cdot \dot{\theta}^2) - \frac{g}{l} (m_1 + m_2) \right] - \frac{C_A}{2 \cdot l^2} \dot{\theta}}{m_1 + 2 \cdot m_2 (\sin \theta)^2} \quad \text{Ec. (4.2)}$$

Dónde C_A (N·m·s) es el coeficiente de rozamiento lineal (o viscoso) en la articulación a_I y $\dot{\theta}$ representa la velocidad angular.

Considerando ahora que el rozamiento principal se localiza en la superficie de contacto entre el pasador y el eje principal respecto del que gira el sistema (ver Figura 8), nótese que el coeficiente de rozamiento será distinto al anterior, la ecuación resultante en este caso es:

$$\ddot{\theta} = \frac{\sin \theta \left[\cos \theta (m_1 \cdot w^2 - 2 \cdot m_2 \cdot \dot{\theta}^2) - \frac{g}{l} (m_1 + m_2) - \frac{C_P}{l} \cdot \dot{\theta} \right]}{m_1 + 2 \cdot m_2 (\sin \theta)^2} \quad \text{Ec. (4.3)}$$

Dónde C_P (N·s) es el coeficiente de rozamiento lineal en el pasador.

² A HISTORY OF CONTROL ENGINEERING 1800 – 1930, S. Bennett.

4.2. LINEALIZACIÓN DE LAS ECUACIONES DEL SISTEMA

El análisis de las Ecs. (4.2) y (4.3), al ser no lineales resulta complejo, para simplificarlo se utilizará el modelo linealizado³ mediante las series de Taylor. En este modelo se considerarán pequeños desplazamientos respecto de un punto de operación:

$$\delta_w = w - w_s \quad \delta_\theta = \theta - \theta_s \quad \text{Ec. (4.4)}$$

Donde δ_w y δ_θ son las pequeñas desviaciones de la velocidad y de la posición angular respecto del punto de operación w_s y θ_s .

Para estudiar el efecto del rozamiento sobre el sistema se han considerado dos puntos de rozamiento principales, rozamiento lineal en el pasador y rozamiento de giro en la articulación a_I .

Cabe decir que las variables w_s y θ_s están relacionadas en el estado estacionario, para conocer dicha relación partimos de la Ec. (4.3), que corresponde a la ecuación no lineal con rozamiento en el pasador:

$$\ddot{\theta} = \frac{\sin \theta \left[\cos \theta (m_1 \cdot w^2 - 2 \cdot m_2 \cdot \dot{\theta}^2) - \frac{g}{l} (m_1 + m_2) - \frac{C_P}{l} \cdot \dot{\theta} \right]}{m_1 + 2 \cdot m_2 (\sin \theta)^2}$$

Sabiendo que en estado estacionario $\dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0$,

$$0 = \frac{\sin \theta_s \left[\cos \theta_s (m_1 \cdot w_s^2) - \frac{g}{l} (m_1 + m_2) \right]}{m_1 + 2 \cdot m_2 (\sin \theta_s)^2} \quad \text{Ec. (4.5)}$$

Es decir,

$$0 = \cos \theta_s (m_1 \cdot w_s^2) - \frac{g}{l} (m_1 + m_2) \quad \text{Ec. (4.6)}$$

³ Ver Anexo 1 para el desarrollo completo de la linealización.

Como cabía esperar, la ecuación resultante es independiente del rozamiento, ya que en el estado estacionario no hay fricción. Despejando θ_s , obtenemos:

$$\theta_s = \arccos \left[\frac{\frac{g}{l} (m_1 + m_2)}{m_1 \cdot \omega_s^2} \right] = \arccos \left[g \cdot \frac{\left(1 + \frac{m_2}{m_1} \right)}{l \cdot \omega_s^2} \right] \quad \text{Ec. (4.7)}$$

El punto de equilibrio de θ_s viene determinado por la relación entre la masa del pasador, m_2 , y la masa de los contrapesos, m_1 , y también por la longitud de los brazos, l , y por el cuadrado de la velocidad angular.

Si suponemos que la masa del pasador, m_2 , es despreciable frente a la masa de los contrapesos, m_1 , la ecuación se reduce a la siguiente:

$$\theta_s = \arccos \left[\frac{g}{l \cdot \omega_s^2} \right] \quad \text{o bien} \quad \omega_s = \sqrt{\frac{g}{l \cdot \cos \theta_s}} \quad \text{Ec. (4.8)}$$

Una vez conocida la relación entre ω_s y θ_s linealizamos las Ecs. (4.2) y (4.3) para facilitar su posterior análisis.

4.2.1. ROZAMIENTO EN EL PASADOR

Si el rozamiento se concentrara en el pasador, asumiendo la contribución de las tres masas y además suponiendo que las longitudes de los brazos son iguales, la función de transferencia resultante es:

$$\frac{\delta_\theta(s)}{\delta_\omega(s)} = \frac{\sin(2 \cdot \theta_s) \cdot m_1 \cdot \omega_s}{\left(m_1 + 2 \cdot m_2 (\sin \theta_s)^2 \right) \cdot s^2 + \left(\sin \theta_s \cdot \frac{C_P}{l} \right) \cdot s + m_1 \cdot \omega_s^2 \cdot (\sin \theta_s)^2} \quad \text{Ec. (4.9)}$$

Dónde θ_s es el ángulo en torno al punto de trabajo linealizado y ω_s es la velocidad angular en torno al punto de trabajo linealizado.

La Ec. (4.9) tiene la estructura típica de los sistemas de segundo orden.

$$T = k \frac{W_n^2}{s^2 + 2\zeta W_n s + W_n^2} \quad \text{Ec. (4.10)}$$

Dónde k es la ganancia en estado estacionario, w_n es la frecuencia natural del sistema y ζ es el factor de amortiguamiento relativo. Al producto de ζw_n se le denomina factor de amortiguamiento.

Si adecuamos la Ec. (4.9) de forma que sea comparable con la Ec. (4.10) y además consideramos la masa del pasador, m_2 , despreciable para extraer conclusiones de forma más sencilla:

$$\frac{\delta_\theta(s)}{\delta_\omega(s)} = \frac{\sin(2 \cdot \theta_s) \cdot w_s}{s^2 + \left(\sin \theta_s \cdot \frac{C_P}{l \cdot m_1} \right) \cdot s + w_s^2 \cdot (\sin \theta_s)^2} \quad \text{Ec. (4.11)}$$

Una vez obtenida la ecuación en el formato adecuado, se comparan las Ecs. (4.10) y (4.11), obteniéndose los siguientes resultados.

$$w_n = w_s \cdot (\sin \theta_s) = \sqrt{\frac{g}{l \cdot \cos \theta_s}} \cdot \sin \theta_s \quad \text{Ec. (4.12)}$$

$$K = \frac{2}{\tan \theta_s \cdot w_s} = \frac{2}{\tan \theta_s} \sqrt{\frac{l \cdot \cos \theta_s}{g}} \quad \text{Ec. (4.13)}$$

$$\zeta \cdot w_n = \frac{C_P \cdot \sin \theta_s}{2 \cdot l \cdot m_1} \quad \text{Ec. (4.14)}$$

$$\zeta = \frac{C_P}{2 \cdot l \cdot w_s \cdot m_1} \quad \text{Ec. (4.15)}$$

La frecuencia natural de oscilación, w_n , es la frecuencia que tendría el sistema si no hubiera rozamiento. Como se muestra en la Ec. (4.12) depende del punto de operación y de la raíz cuadrada de la longitud de los brazos, de forma que a mayor longitud menor es la frecuencia natural.

La ganancia, k , representa el valor que toma la respuesta del sistema para un tiempo tendiendo a infinito. Si la ganancia es mayor que la unidad supone una amplificación, mientras que si es menor que la unidad representa una atenuación del sistema. De acuerdo a la Ec. (4.13) depende del punto de operación y de la raíz de la longitud de los brazos, de tal forma que si aumenta la longitud aumenta la ganancia.

El factor de amortiguamiento, $\zeta\omega_n$, depende del coeficiente de rozamiento de forma que, como es lógico, a mayor rozamiento más se amortigua. A su vez depende del punto de operación, de la longitud y de la masa de los contrapesos, de tal forma que a mayor longitud, menor es el amortiguamiento y lo mismo ocurre con la masa, m_l . A mayor masa, la energía cinética aumenta, haciendo que exista menor rozamiento.

El factor de amortiguamiento relativo, ζ , depende del coeficiente de rozamiento, tal que a mayor rozamiento más se amortigua y también depende de la longitud, de la velocidad angular en el punto de operación y de la masa de los contrapesos de forma que cuanto mayor sean, el amortiguamiento relativo disminuye.

Dependiendo del valor de ζ , la respuesta del sistema será distinta:

- Si $0 < \zeta < 1$: Sistema subamortiguado.
- Si $\zeta = 1$: Sistema críticamente amortiguado.
- Si $\zeta > 1$: Sistema sobreamortiguado.

4.2.2. ROZAMIENTO EN LA ARTICULACIÓN

Por otro parte, considerando como principal el rozamiento en la articulación a_l , la función de transferencia queda de la siguiente forma:

$$\frac{\delta_\theta(s)}{\delta_\omega(s)} = \frac{\sin \theta_s \cdot \cos \theta_s \cdot 2 \cdot m_l \cdot w_s}{\left(m_1 + 2 \cdot m_2 (\sin \theta_s)^2\right) \cdot s^2 + \left(\frac{C_A}{2 \cdot l^2}\right) \cdot s + m_l \cdot w_s^2 \cdot (\sin \theta_s)^2} \quad \text{Ec. (4.16)}$$

Obviamente la Ec. (4.16) también tiene la estructura típica de los sistemas de segundo orden.

Si adecuamos la Ec. (4.16) de forma que sea comparable con la Ec. (4.10) y además consideramos la masa del pasador, m_2 , despreciable para extraer conclusiones de forma más sencilla:

$$\frac{\delta_\theta(s)}{\delta_\omega(s)} = \frac{\sin(2 \cdot \theta_s) \cdot w_s}{s^2 + \left(\frac{C_A}{2 \cdot l^2 \cdot m_1} \right) \cdot s + w_s^2 \cdot (\sin \theta_s)^2} \quad \text{Ec. (4.17)}$$

Una vez obtenida la ecuación en el formato adecuado, se comparan las Ecs. (4.17) y (4.10) obteniendo los siguientes resultados.

$$w_n = w_s \cdot (\sin \theta_s) = \sqrt{\frac{g}{l \cdot \cos \theta_s}} \cdot \sin \theta_s \quad \text{Ec. (4.18)}$$

$$K = \frac{2}{\tan \theta_s \cdot w_s} = \frac{2}{\tan \theta_s} \sqrt{\frac{l \cdot \cos \theta_s}{g}} \quad \text{Ec. (4.19)}$$

$$\zeta \cdot w_n = \frac{C_A}{4 \cdot l^2 \cdot m_1} = \frac{C_A}{4 \cdot I} \quad \text{Ec. (4.20)}$$

$$\zeta = \frac{C_A}{4 \cdot l^2 \cdot m_1 \cdot w_s \cdot \sin \theta_s} = \frac{C_A}{4 \cdot l \cdot m_1 \cdot \sin \theta_s} \sqrt{\frac{\cos \theta_s}{l \cdot g}} \quad \text{Ec. (4.21)}$$

La frecuencia natural del sistema y la ganancia tienen la misma interpretación que en el caso en el que se ha considerado el rozamiento principal en el pasador (apartado 4.2.1).

Sin embargo, el factor de amortiguamiento en este caso no depende del punto de operación, ya que se trata de un rozamiento articular. Depende del coeficiente de rozamiento, tal que cuanto mayor sea éste más se amortigua el sistema y también depende del momento de inercia máximo, $I = l^2 \cdot m_1$, de tal forma que a mayor momento de inercia menor es el amortiguamiento.

La diferencia entre las funciones de transferencia suponiendo el rozamiento en distintos puntos, Ecs. (4.11) y (4.17), como era de esperar con sistemas lineales de segundo orden, está en el segundo coeficiente del polinomio característico, en el factor de amortiguamiento del sistema.

Mediante la obtención de estas ecuaciones se demuestran teóricamente los problemas y algunas de las soluciones dadas al regulador de Watt en el siglo XIX. Al mejorar las técnicas de construcción, los nuevos péndulos eran contruidos con materiales de mejor calidad y por tanto con coeficientes de rozamiento menores. Según las Ecs. (4.14) y (4.20) un coeficiente de rozamiento menor supone una disminución del amortiguamiento y por esta razón los nuevos reguladores oscilaban más.

Hubo algunos científicos e ingenieros de la época que intentaron solucionar el problema de la oscilación añadiendo masas más grandes al regulador. Teóricamente las Ecs. (4.14) y (4.20) muestran como al aumentar la masa de los contrapesos el amortiguamiento disminuye.

Por otro lado, el Regulador de Watt tenía un offset, una desviación de la velocidad, que muchos intentaron solucionar. Esa desviación era provocada por la ganancia del sistema, que tal y como muestra la Ec. (4.19) depende del punto de operación y de la longitud de los brazos.

4.3. SIMULACIÓN DEL REGULADOR CON MATLAB

4.3.1. INTRODUCCIÓN

Una vez obtenidas las ecuaciones en diversas formas y según distintas suposiciones, el siguiente paso corresponde a la simulación del sistema mediante la herramienta Simulink.

Para realizar la simulación se plantean las ecuaciones del espacio de estados, las cuales consisten en dar un modelo matemático de un sistema físico, descrito mediante un conjunto de entradas, salidas y variables de estado, relacionadas por ecuaciones diferenciales que se combinan en una ecuación diferencial matricial. La variante lineal del espacio de estados se plantea de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= A \cdot x + B \cdot u \\ y &= C \cdot x + D \cdot u\end{aligned}\quad \text{Ec. (4.22)}$$

- Dónde:
- x es el vector de estados.
 - y es el vector de salida.
 - u es el vector de entradas (o de control).
 - A es la matriz de estados.
 - B es la matriz de entrada.
 - C es la matriz de salida.
 - D es la matriz de transmisión directa, por simplicidad se suele tomar como la matriz cero.

Partiendo de la Ec. (4.3) que considera el rozamiento en el pasador por considerarlo más influyente, ya que posee mayor superficie de contacto:

$$\ddot{\theta} = \frac{\sin \theta \left[\cos \theta (m_1 \cdot w^2 - 2 \cdot m_2 \cdot \dot{\theta}^2) - \frac{g}{l} (m_1 + m_2) - \frac{C_P}{l} \cdot \dot{\theta} \right]}{m_1 + 2 \cdot m_2 (\sin \theta)^2} = u \quad \text{Ec. (4.23)}$$

Siendo la relación lineal del espacio de estados:

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = \ddot{\theta} = u \quad u = u(\theta, \dot{\theta}) \quad \text{Ec. (4.24)}$$

Y denominando de la siguiente manera las variables a las que se hace referencia:

$$\begin{aligned} x_1 &= \theta \\ x_2 &= \dot{\theta} \end{aligned} \rightarrow \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= u \end{aligned} \quad \text{Ec. (4.25)}$$

Así, se puede calcular el valor de las matrices A, B, C y D para que se cumplan las ecuaciones del sistema:

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u$$
$$[y] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \text{Ec. (4.26)}$$

El bloque de Simulink que representa el espacio de estados, además de introducir las matrices correspondientes, permite también imponer un estado inicial a las variables x_1 (ángulo) y x_2 (velocidad angular), que en este caso serán “thetai” y cero, respectivamente. Siendo “thetai” una variable que tomará el valor del ángulo inicial en el programa realizado en Matlab.

El lazo quedará de la forma que se ve en la siguiente figura, en la que $f(u)$ representa la expresión de la ecuación que se quiere simular, el bloque “Step” permite introducir la velocidad angular y la ganancia K es utilizada para hacer una conversión de unidades, de radianes a grados (más útiles para la comprensión).

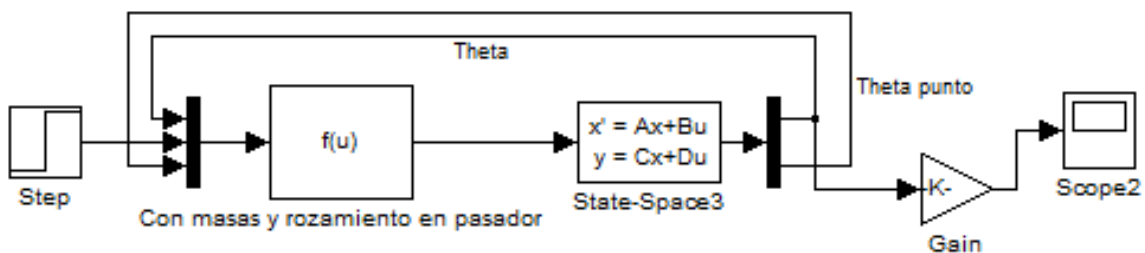


Figura 9: Simulación del sistema con Simulink

Al tratarse de un sistema no lineal, es muy importante elegir adecuadamente los parámetros de simulación. Por un lado se debe elegir entre un paso de integración fijo o variable. En el primer caso, permanece constante a lo largo de toda la simulación, mientras que en el segundo, el paso varía automáticamente dependiendo de la dinámica del modelo.

En este caso se elige paso variable, ya que esta opción hace que se reduzca el paso de integración cuando el sistema cambia rápidamente, para así mantener la precisión y por el contrario, aumenta el paso cuando el modelo actúa más lento, evitando datos innecesarios.

Por otro lado, Matlab permite elegir el método numérico de resolución, de entre una gran variedad es seleccionado el “ode45” que utiliza un Runge-Kutta 4-5 explícito para resolver el sistema, elegido por ser un método robusto y fiable.

En el caso en el que se considera el rozamiento en la articulación superior, el procedimiento será análogo, únicamente habrá que cambiar la fórmula que expresa la ecuación del sistema.

Como comprobación de una correcta simulación de las ecuaciones no lineales, se simula el sistema linealizado en torno al mismo punto de trabajo. Para ello es necesario introducir la función de transferencia, en la que se utilizan valores desviados de la velocidad y del ángulo. Por lo tanto habrá que tener en cuenta el punto de operación:

$$\delta_w = w - w_s \quad \delta_\theta = \theta - \theta_s \quad \text{Ec. (4.27)}$$

De forma que antes de calcular la función de transferencia habrá que restarle a la velocidad angular su valor estacionario. Y después de calcular el valor del ángulo desviado, habrá que sumarle el estacionario, tal y como se aprecia en la Figura 10.

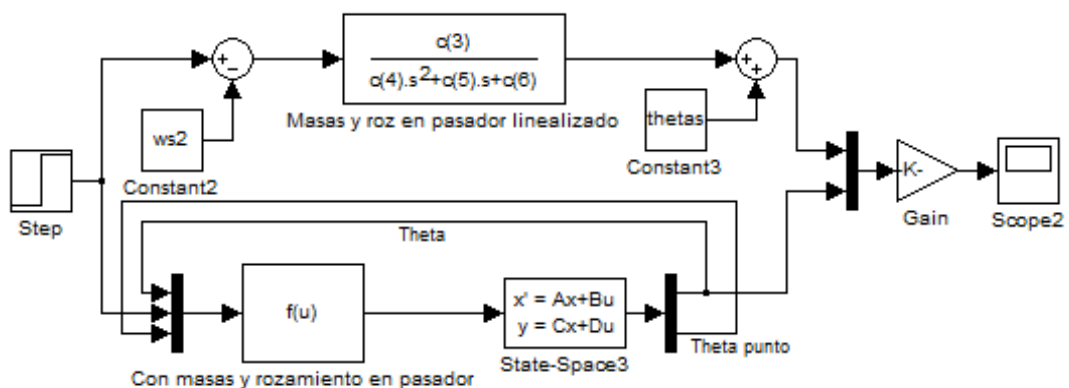


Figura 10: Sistema lineal y no lineal

Hay que notar que el punto de trabajo debe ser muy aproximado para realizar la comprobación, ya que la linealización del sistema sólo es válida para valores próximos al punto de trabajo. Por lo tanto habrá que proporcionar un escalón que se acerque al valor del punto de operación w_s pero sin llegar a igualarlo, puesto que sino, el resultado será cero.

La Figura 11 muestra un ejemplo de esto mismo, en el que la velocidad en el estado estacionario es 11.89 rad/s, siendo la velocidad angular proporcionada en la simulación de 12 rad/s.

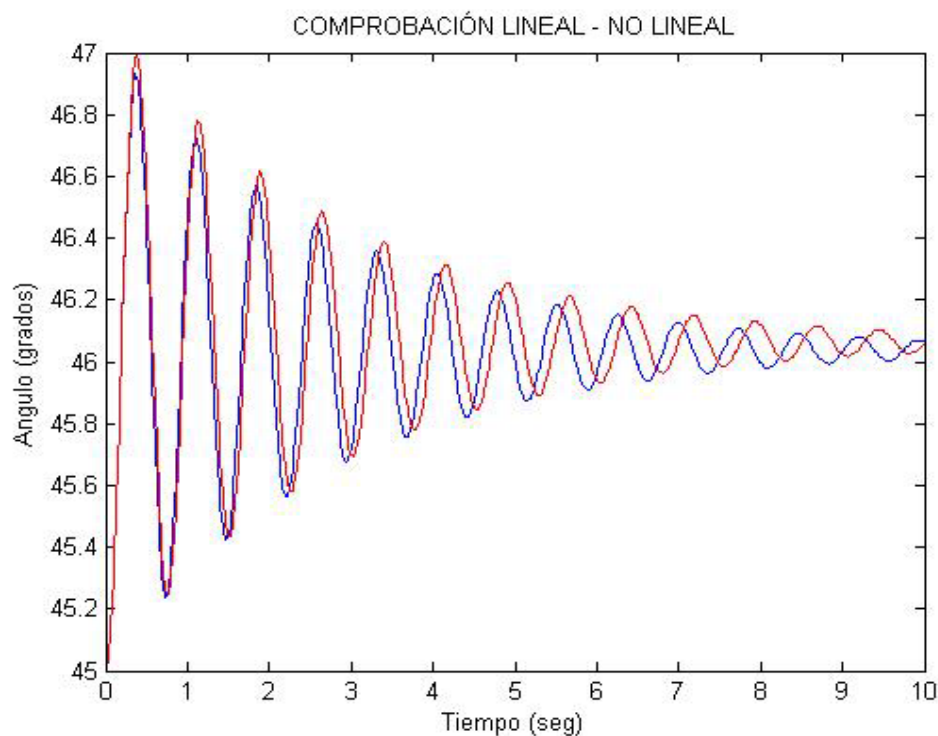


Figura 11: Comparación de la respuesta del sistema lineal (rojo) frente al no lineal (azul).

Se puede apreciar que las dos son muy parecidas, sobre todo en los instantes iniciales ($t < 1.5$ seg.), a partir de este tiempo las amplitudes siguen siendo muy similares pero cada vez más desfasadas, esto último se produce por el offset que se aprecia entre ellas, que se hace más notable conforme disminuye la amplitud.

Se considera que estos resultados validan la correcta implementación del sistema. Sin embargo, se produce un desfase que puede ser debido a la no linealidad de la respuesta azul.

4.3.2. SIMULACIONES

Posteriormente se van a hacer diversas simulaciones que se realizarán para el sistema no lineal. Lo que nos interesa conocer es el estado estacionario del regulador para que éste actúe como un controlador proporcional, por lo que resulta esencial conocer cuanto tiempo tardará en estabilizarse, es decir, el tiempo de estabilización.

Se crea un programa en Matlab que realice un barrido de simulaciones en el que varíe el ángulo inicial (θ_{tai}) y el coeficiente de rozamiento. De cada gráfica obtenida se recoge el dato del tiempo de estabilización y se representa frente al ángulo inicial para varias curvas que representen distintos coeficientes de rozamiento, o a la inversa, el tiempo frente al rozamiento para diversos ángulos de inicio.

Para calcular el tiempo de estabilización, t_s , se plantean dos opciones, la primera es hacerlo teóricamente y la otra experimentalmente. La forma teórica consiste en utilizar la aproximación del tiempo de estabilización (basado en un error final del 1%) para sistemas lineales:

$$t_s = \frac{4.6}{\zeta \cdot \omega_n} \quad \text{Ec. (4.28)}$$

Que depende del amortiguamiento relativo, ζ , y de la frecuencia natural del sistema, ω_n . ζ se puede obtener a través del amortiguamiento, d , que expresa la atenuación de la respuesta oscilatoria entre t y un periodo más tarde, $t+2\pi/\omega_p$. La relación entre d y ζ viene dada por:

$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi / \ln d)^2}} \quad \text{Ec. (4.29)}$$

Siendo ω_p la frecuencia amortiguada del sistema, expresada por:

$$\omega_p = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \quad \text{Ec. (4.30)}$$

La segunda opción que se plantea para calcular el tiempo de estabilización es hacerlo experimentalmente, es decir, el tiempo que tardan las oscilaciones en entrar definitivamente en la banda del $\pm 1\%$ del valor final.

Finalmente se elige la segunda opción, la experimental, por simplicidad y por el hecho de que las fórmulas teóricas se cumplen sólo para sistemas lineales y en este caso se está utilizando un sistema no lineal.

El programa que realiza las simulaciones⁴ se puede aplicar tanto al sistema con rozamiento en el pasador, como al de rozamiento en la articulación, siendo posible así, comparar los resultados obtenidos. Por último, se fijan los parámetros del sistema siendo los siguientes:

- Gravedad = 9.8 m/s^2
- Longitud = 0.1 m
- Masa de las bolas = $m_1 = 100 \text{ gr}$
- Masa del pasador = $m_2 = 0.02 * m_1 = 2 \text{ gr}$

Todas las simulaciones que se van a realizar hasta el apartado F se estudiarán para el caso del sistema no lineal y con rozamiento en el pasador. Finalmente la simulación G servirá para comparar los dos tipos de rozamientos considerados. A continuación se muestra una lista de todos los casos que se van a estudiar, variando la velocidad angular, las masas y las longitudes:

- A.** $w = 15 \text{ rad/s}$, $l = 0.1 \text{ m}$, $m_1 = 0.1 \text{ kg}$, $m_2 = 0.002 \text{ kg}$.
- B.** $w = 12 \text{ rad/s}$, $l = 0.1 \text{ m}$, $m_1 = 0.1 \text{ kg}$, $m_2 = 0.002 \text{ kg}$.
- C.** $w = 30 \text{ rad/s}$, $l = 0.1 \text{ m}$, $m_1 = 0.1 \text{ kg}$, $m_2 = 0.002 \text{ kg}$.
- D.** $w = 15 \text{ rad/s}$, $l = 0.1 \text{ m}$, $m_1 = 0.2 \text{ kg}$, $m_2 = 0.004 \text{ kg}$.
- E.** $w = 15 \text{ rad/s}$, $l = 0.1 \text{ m}$, $m_1 = 0.2 \text{ kg}$, $m_2 = 0.002 \text{ kg}$.
- F.** $w = 15 \text{ rad/s}$, $l = 0.2 \text{ m}$, $m_1 = 0.1 \text{ kg}$, $m_2 = 0.002 \text{ kg}$.

Se ha realizado asimismo una simulación final, la simulación G, que nos permitirá comparar los dos tipos de rozamientos considerados.

⁴ Ver detalles en Anexo II

Simulación A. $w = 15 \text{ rad/s}$, $l = 0.1 \text{ m}$, $m_1 = 0.1 \text{ kg}$, $m_2 = 0.002 \text{ kg}$.

Se realiza un barrido para distintos ángulos iniciales desde 5 hasta 85°, siendo éste el rango de movimiento físicamente realizable por el mecanismo. Y también se realiza un segundo barrido de los coeficientes de rozamiento en el pasador, C_P (N·s), estimados entre 0.001 y 0.016 N·s. Valores de rozamiento inferiores a éstos son muy bajos y difíciles de medir ya que el sistema oscila casi permanentemente. Por otro lado, para valores mayores de 0.016 a penas se observan diferencias significativas con este último dato.

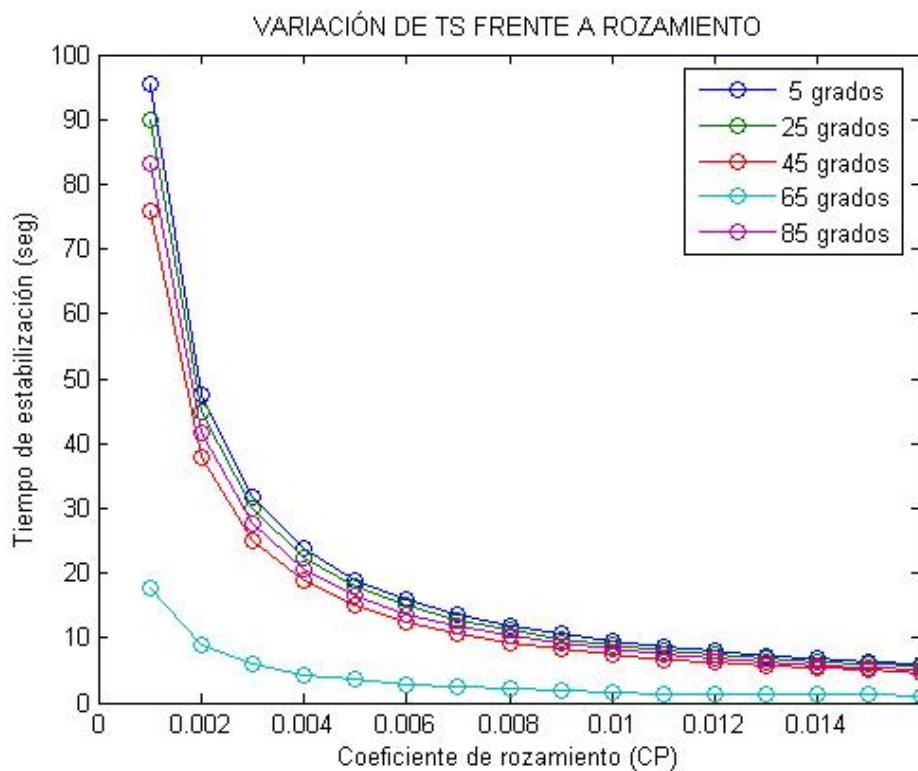


Figura 12: T_s frente a rozamiento I

La Figura 12, muestra que a mayor rozamiento, menor es el tiempo de estabilización, t_s . Se puede apreciar que, para 65° el tiempo de estabilización es claramente inferior que para el resto de ángulos de inicio del sistema, tanto para ángulos mayores como menores el tiempo de estabilización es mayor.

Este comportamiento se debe a que el sistema tiende a estabilizarse en torno a un ángulo determinado, que en este ensayo, para una velocidad angular de 15 rad/s, se sitúa en torno a los 65° y cuánto más cerca se encuentre el ángulo inicial de éste, menos

tiempo tarda en estabilizarse. Este resultado se puede demostrar teóricamente mediante las condiciones del punto de equilibrio obtenido en la Ec. (4.7):

$$\theta_s = \arccos \left[\frac{\frac{g}{l} (m_1 + m_2)}{m_1 \cdot \omega_s^2} \right] = \arccos \left[g \cdot \frac{\left(1 + \frac{m_2}{m_1} \right)}{l \cdot \omega_s^2} \right]$$

El punto de equilibrio de θ_s viene determinado por la relación entre la masa del pasador, m_2 , y la masa de los contrapesos, m_1 , y también por la longitud de los brazos, l , y por el cuadrado de la velocidad angular.

Considerando una velocidad de 15 rad/s (143,2 rpm aproximadamente) y con los valores de los parámetros utilizados obtenemos $\theta_s = 63.6^\circ$, muy cercano al valor obtenido experimentalmente. Por lo tanto, cuanto más lejos esté (por arriba o por abajo) el ángulo inicial de dicho valor estacionario, mayor será el tiempo de estabilización.

Este comportamiento se puede observar de forma más clara en la Figura 13, dónde se representa la variación de t_s frente al ángulo inicial para distintos coeficientes, C_p .

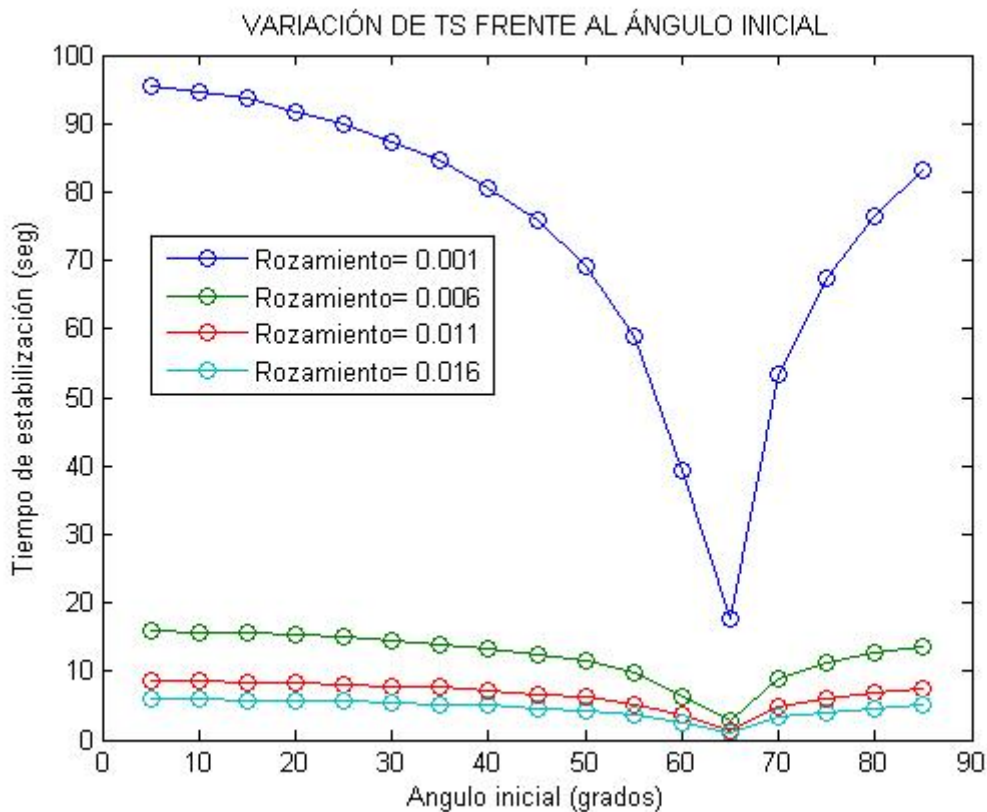


Figura 13: T_s frente al ángulo inicial

La Figura 13 vuelve a mostrar el ángulo estacionario en torno a los 63.6°, ya que cuando las curvas se aproximan a este punto, reducen considerablemente el tiempo que tarda en estabilizarse.

Simulación B. $w = 12 \text{ rad/s}$, $l = 0.1 \text{ m}$, $m_1 = 0.1 \text{ kg}$, $m_2 = 0.002 \text{ kg}$.

En este apartado se va a analizar la influencia de la variación de la velocidad angular. Recordando la Ec. (4.7) del estado estacionario existirá una velocidad angular crítica cuando $\cos(\theta_s) = 1$.

$$\theta_s = \arccos \left[\frac{\frac{g}{l}(m_1 + m_2)}{m_1 \cdot w_s^2} \right] \rightarrow w_s^2 = \frac{\frac{g}{l}(m_1 + m_2)}{m_1} = 99.96 \rightarrow w_s \approx 10 \text{ rad/s} \quad \text{Ec. (4.31)}$$

En el caso que nos ocupa, para una velocidad angular menor de 10 rad/s (95,5 rpm) cambia la dinámica del sistema, ya no hay estado estacionario y el mecanismo oscila permanentemente entre dos valores. Teniendo en cuenta este dato, se elige una velocidad angular de 12 rad/s (114,6 rpm), menor que la de la simulación A (15 rad/s) pero sin llegar al dato crítico.

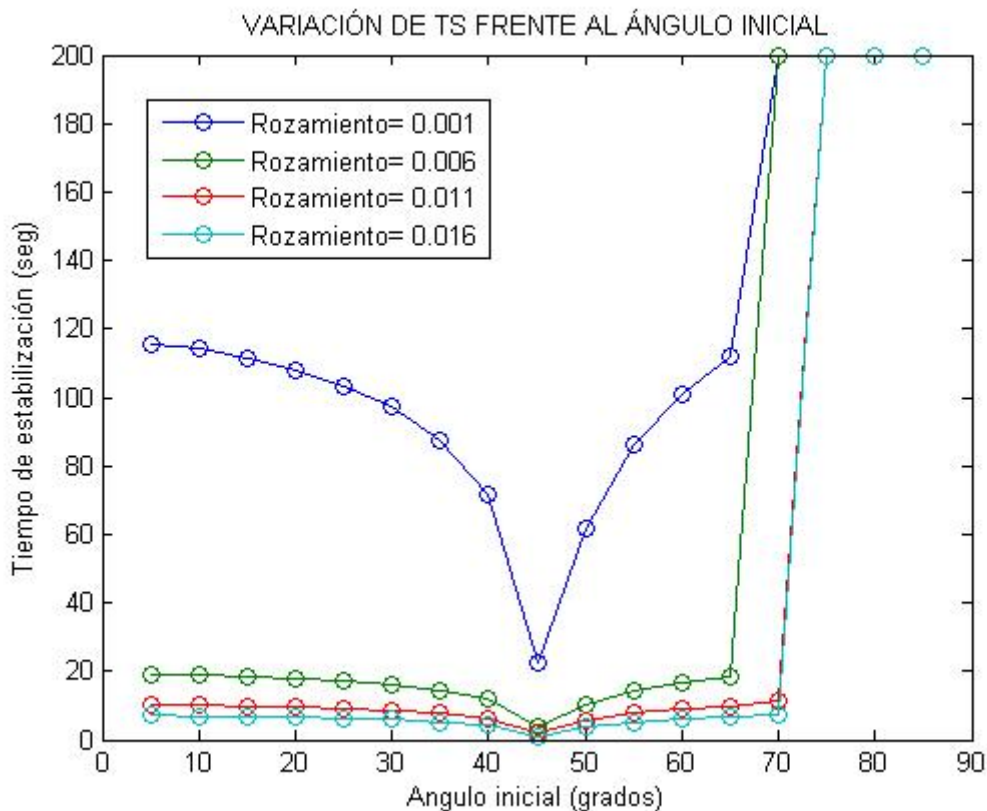


Figura 14: Ts frente al ángulo inicial, 12 rad/s

El ángulo de equilibrio en este caso es menor, unos 46 grados. Comparando las Figuras 13 y 14 en torno al ángulo estacionario, se observa que cuanto menor es la velocidad angular mayor es el tiempo de estabilización.

Además, se puede comprobar que para ángulos iniciales mayores de 65 grados el regulador tiende a tiempos de estabilización muy altos que no se alcanzan a representar en la Figura 14.

Para poder entender este comportamiento, se elige uno de los puntos conflictivos y se representa su salida angular.

La Figura 15 representa el ángulo de salida para un ángulo inicial de 80° y un coeficiente de rozamiento de $0.016 \text{ N}\cdot\text{s}$, cuyo tiempo de estabilización es muy alto. Como se aprecia en la figura, los contrapesos oscilan desde 80° a -80° , algo físicamente imposible pero matemáticamente factible puesto que no se ha impuesto una restricción al respecto.

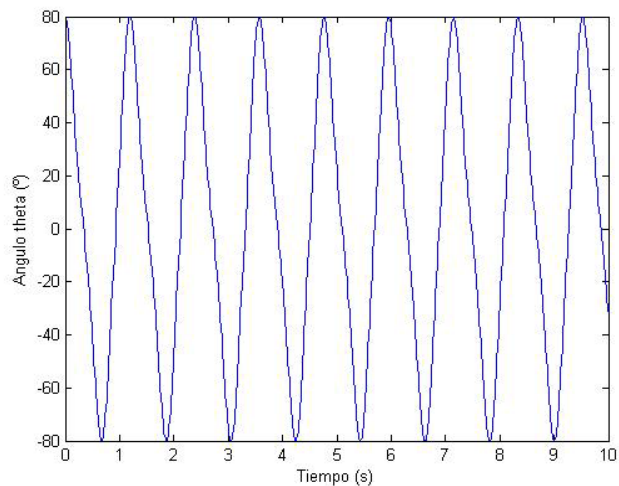


Figura 15: Ángulo de salida del punto conflictivo

Esto se debe a que al haber disminuido la velocidad angular, la fuerza centrífuga también disminuye y las bolas oscilan más rápido, haciendo que en la simulación matemática atraviesen el ángulo cero y oscilen entre ambos lados, hecho que no es físicamente factible.

Se puede deducir fácilmente que si aumentamos el coeficiente de rozamiento, las masas ya no se moverán con tanta libertad y alcanzarán el estado estacionario. La Figura 16 muestra un ejemplo dónde se representa el tiempo de estabilización frente al ángulo inicial, con un coeficiente de rozamiento de $0.1 \text{ N}\cdot\text{s}$, muy superior al de la Figura 15.

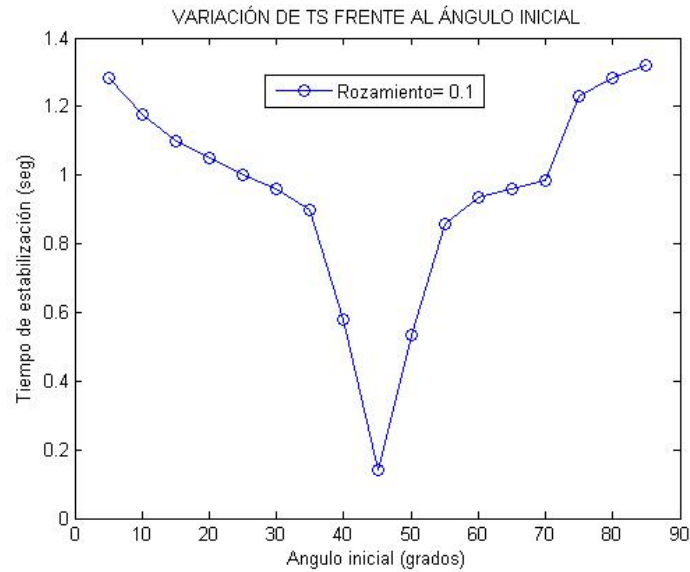


Figura 16: Ts frente a ángulo inicial, $C_p = 0.1$ N/s

Simulación C. $w = 30$ rad/s, $l = 0.1$ m, $m_1 = 0.1$ kg, $m_2 = 0.002$ kg.

Siguiendo con el análisis de la influencia que tiene la velocidad angular en el tiempo de estabilización, en el siguiente apartado se va a aumentar la misma hasta 30 rad/s (aproximadamente 286.5 rpm). En la Figura 17 se muestra su representación.

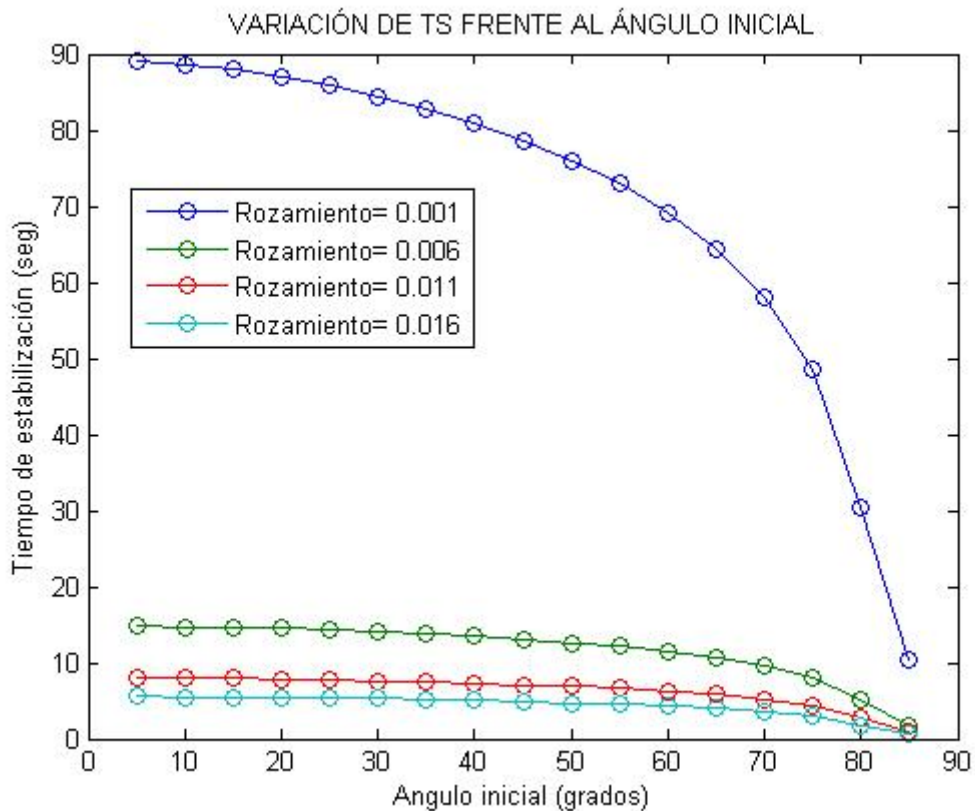


Figura 17: Ts frente al ángulo inicial, 30 rad/s

Al haber cambiado la velocidad, el ángulo de equilibrio en este caso es 83.6 grados. En la Figura 17 se muestra como las curvas son decrecientes, esto se debe a que el barrido es con ángulos iniciales de hasta 85°, alcanzando el valor estacionario y siendo físicamente imposible alcanzar valores mayores.

Observando detenidamente las Figuras 13 (caso A) y 17 y comparando los tiempos en igualdad de condiciones en torno al ángulo estacionario, se llega a la conclusión de que cuanto mayor sea la velocidad angular menor será el tiempo de estabilización.

Simulación D. $w = 15 \text{ rad/s}$, $l = 0.1 \text{ m}$, $m_1 = 0.2 \text{ kg}$, $m_2 = 0.004 \text{ kg}$.

Resulta interesante saber qué ocurre al variar las masas de las bolas o contrapesos. En esta simulación se aplicará el doble de masa proporcionalmente a los dos contrapesos y al pasador.

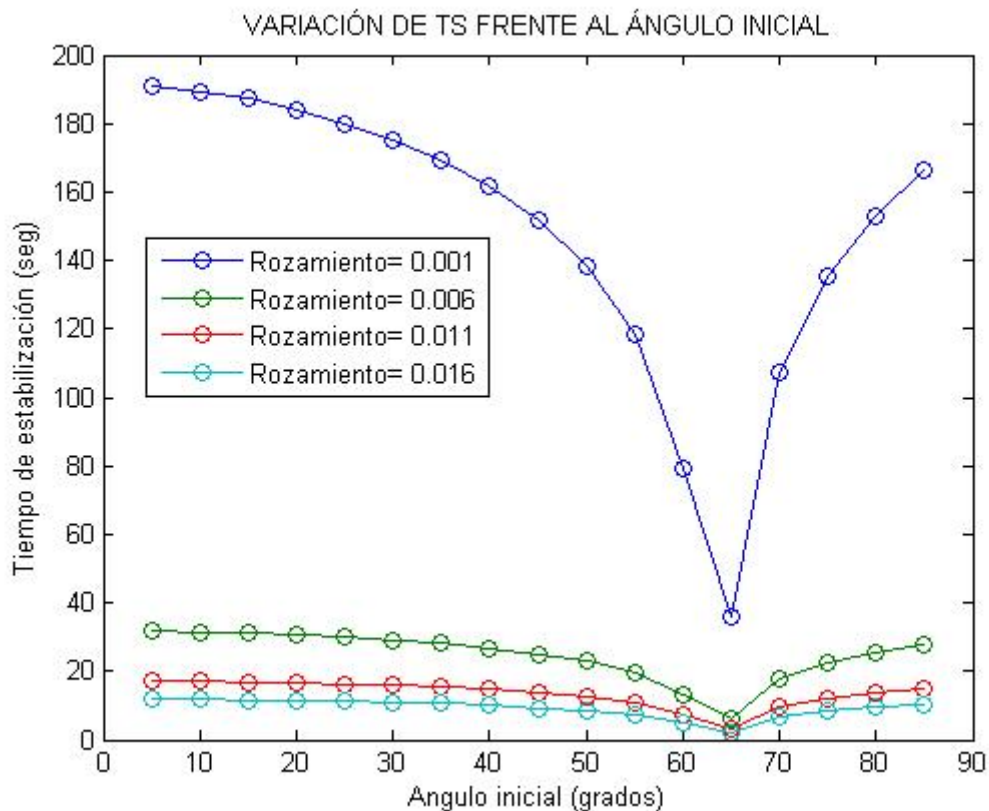


Figura 18: Ts frente al ángulo inicial, peso doble.

La Figura 18 representa la variación del tiempo de estabilización con una velocidad angular de 15 rad/s, cuando las bolas tienen una masa de 200 gramos y el pasador de 4 gramos, el doble que en experimentos anteriores.

Comparando este resultado con su homólogo para la mitad de masa, caso A (Figura 13), aumentando al doble las masas, el tiempo de estabilización es aproximadamente el doble.

Simulación E. $w = 15 \text{ rad/s}$, $l = 0.1 \text{ m}$, $m_1 = 0.2 \text{ kg}$, $m_2 = 0.002 \text{ kg}$.

En este caso las bolas mantienen la misma masa que en el apartado anterior, pero el pasador tiene una masa de 0.002 kg al igual que en el caso A.

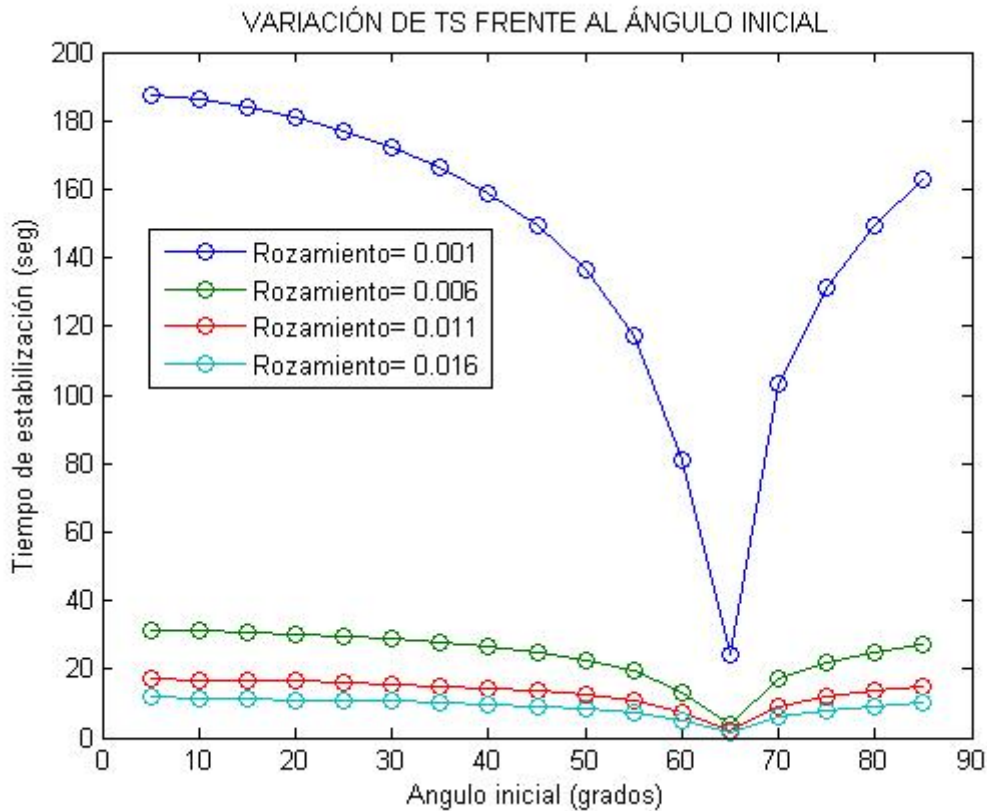


Figura 19: Ts frente al ángulo inicial, peso doble excepto pasador.

Como se muestra en la Figura 19, la disminución de la masa del pasador aumenta el tiempo de estabilización, sin embargo, la variación con respecto al caso D es pequeña, de unos 10 segundos como máximo.

Comparando las Figuras 13, 18 y 19, correspondientes a los casos A, D y E respectivamente, puede parecer a simple vista que el ángulo de equilibrio del sistema es siempre el mismo, 65° , sin embargo, en el caso A se ha mencionado que dicho ángulo depende de la relación entre la masa del pasador y de las bolas.

Recordando dicha expresión:

$$\theta_s = \arccos \left[g \cdot \frac{\left(1 + \frac{m_2}{m_1} \right)}{l \cdot \omega_s^2} \right]$$

Al depender de la relación entre las masas, en el caso de aumentar ambas proporcionalmente, el ángulo es el mismo. Sin embargo, si sólo se aumenta m_1 , al ser m_2 despreciable frente a la primera, también se obtiene el mismo ángulo.

Por lo tanto, mientras m_2 sea despreciable frente a m_1 , la variación de las masas no afectará en gran medida al ángulo de estabilización del regulador.

Simulación F. $\omega = 15 \text{ rad/s}$, $l = 0.2 \text{ m}$, $m_1 = 0.1 \text{ kg}$, $m_2 = 0.002 \text{ kg}$.

La longitud de los brazos es un parámetro del regulador de Watt que varía de unos sistemas a otros, en la primera simulación realizada (caso A) la longitud era de 10 cm, veamos que ocurre si se aumenta esa longitud hasta 20 cm.

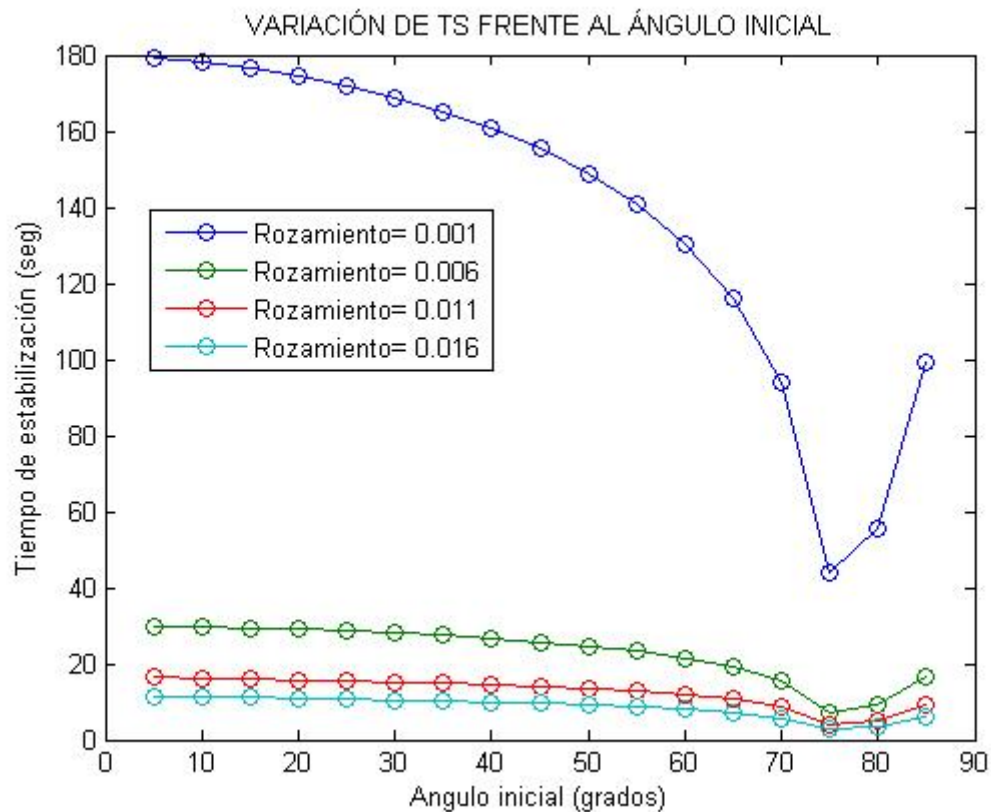


Figura 20: Ts frente al ángulo inicial, longitud 20 cm.

Observando la representación de diversas pruebas realizadas se aprecian dos aspectos importantes, el primero es que el aumento de longitud de los brazos del regulador se traduce en un aumento del tiempo de estabilización.

La segunda conclusión obtenida es que existe una longitud para la cual el tiempo de estabilización es mínimo, y por debajo de la misma el sistema tarda más en estabilizarse. Esa longitud para el caso que nos ocupa es de 7 cm.

Por otro lado, el ángulo de equilibrio ha aumentado, ha pasado de ser 63.6° a 77.2° . Recordando la expresión del estado estacionario Ec.(4.7), la longitud influye en el cálculo, a mayor longitud del brazo, mayor es el ángulo de estabilización.

Simulación G. Comparación de los dos tipos de rozamientos considerados,
 $w = 15 \text{ rad/s}$, $l = 0.1 \text{ m}$, $m_1 = 0.1 \text{ kg}$, $m_2 = 0.002 \text{ kg}$.

En este apartado se van a analizar las diferencias de comportamiento del regulador según si el rozamiento principal se supone en el pasador o en la articulación a_1 , hasta ahora sólo se ha analizado el primero. En la siguiente figura se representa el sistema con rozamiento en la articulación a_1 , y los mismos parámetros que en el caso A.

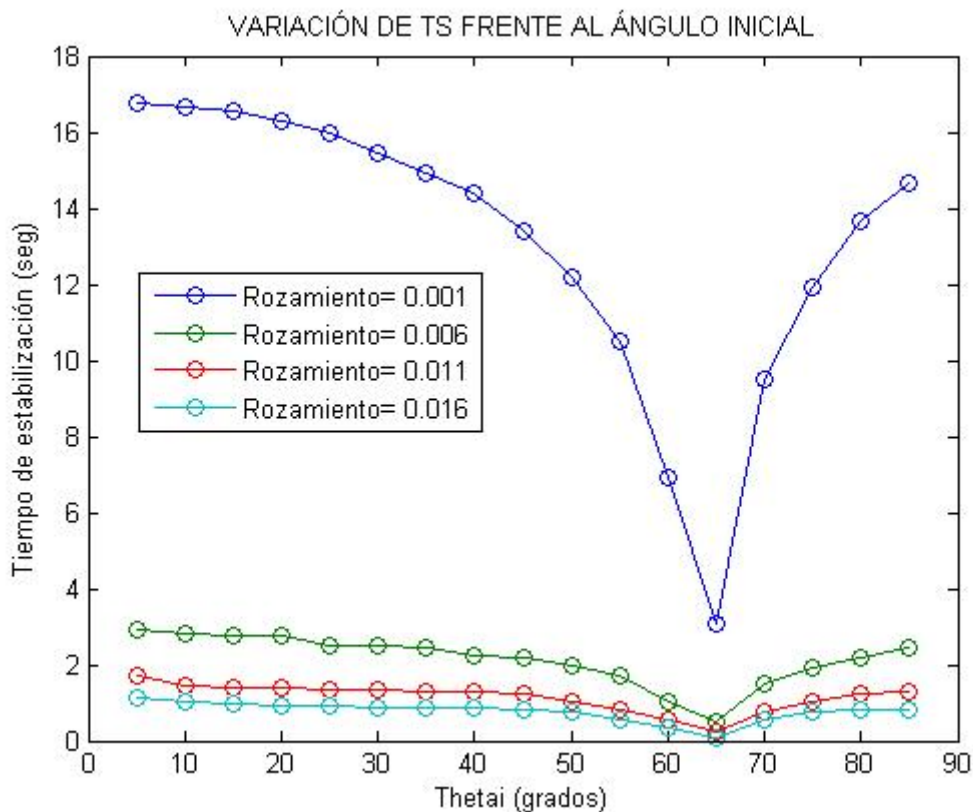


Figura 21: Ts frente al ángulo inicial, rozamientos

Comparando las Figuras 13 y 21, que corresponden al caso A y al G respectivamente, el ángulo de estabilización es el mismo, y la tendencia de las curvas también. Lo único que varía es el tiempo de estabilización, dato que a priori no es comparable en absoluto, pues el rozamiento articular representa un momento angular, mientras que el rozamiento en el pasador corresponde a un momento lineal.

El rozamiento es una parte muy importante del mecanismo, ya que si no existe o es muy pequeño, el sistema no funciona correctamente sino que se comporta como un péndulo y tiene un movimiento oscilatorio permanente. A mediados del siglo XIX, los científicos de la época se dieron cuenta de este cambio de comportamiento cuando mejoraron los procesos y la calidad de los materiales, pero lo que no sabían era por qué ocurría.

Realizando una simulación sin rozamiento, la gráfica que representa el ángulo de salida respecto del tiempo es una curva sinusoidal, con una amplitud y una frecuencia determinada. Esto representa una curva que no se amortigua y que por tanto, no tiende a ningún valor, únicamente varía desde un máximo a un mínimo. De esta forma, el regulador resulta inútil para su función.

4.3.3. RESUMEN DE CONCLUSIONES

- A. A mayor coeficiente de rozamiento, menor es el tiempo de estabilización, t_s .
Cuanto más cerca esté el ángulo inicial del ángulo en estado estacionario menor es t_s .
- B. Existe una velocidad angular crítica dependiente de la longitud de los brazos y de las masas, por debajo de la cual cambia la dinámica del sistema y el péndulo oscila permanentemente.
A mayor velocidad angular, mayor es t_s .
Cuando la velocidad angular es baja y el ángulo inicial alto se dan comportamientos de oscilación permanente.
- C. A mayor velocidad angular, menor t_s .

- D. Un aumento proporcional de las tres masas del sistema (tanto de las bolas como del pasador) se traduce en un aumento considerable del tiempo de estabilización.
- E. Mientras la masa del pasador sea despreciable frente a la de las bolas, la variación de éstas no afecta al valor del ángulo estacionario.
- F. A mayor longitud de los brazos, mayor t_s .
Existe una longitud crítica para la cual el tiempo de estabilización es mínimo.
- G. Los dos rozamientos considerados no son comparables en cuanto a t_s debido a su distinta naturaleza, sin embargo las curvas representadas tienen la misma forma.

4.4. CONSTRUCCIÓN Y ESTUDIO DEL REGULADOR

Una vez estudiado el comportamiento teórico del Regulador de Watt, uno de los objetivos del proyecto consiste en fabricar un regulador y estudiar su funcionamiento.

4.4.1. CONSTRUCCIÓN DEL REGULADOR

Se pretende fabricar un regulador con materiales de calidad, sin embargo no se dispone de presupuesto para ello. En el laboratorio se encuentran disponibles diversos packs de piezas LEGO, por lo que se plantea la idea de crear un regulador con dichas piezas, la construcción se realizará siguiendo el manual del profesor Remco Leine de la Universidad de Suiza, que diseñó un modelo del regulador como el de la Figura 22.

El regulador consta de un motor de 9V gris, está en la parte inferior, entre las dos ruedas blancas, las cuales actúan de inercia. El motor está acoplado mediante unos engranajes a ambas ruedas con una relación de 1:3, de forma que por cada vuelta del motor la rueda de inercia da 3 vueltas. Por otro lado, el motor está engranado al eje principal del regulador, con una relación 1:1. El eje gira solidario con dos brazos que sostienen dos ruedas en sus extremos inferiores, los brazos pivotan en torno a un punto, haciendo que cuando el sistema gire, las ruedas suban y bajen gracias a un pasador. Este movimiento se traslada a la parte superior del mecanismo, sujeta por una torre construida en uno de los laterales. El desplazamiento producido hace girar un sensor angular, de forma que esta traslación sea medible.



Figura 22: Regulador de Watt con LEGOs (www.zfm.ch)

En la Figura 22 aparece un bloque de color amarillo y gris, que se denomina RCX, y es donde se encuentra toda la parte lógica y electrónica que permite la mayoría de las acciones del robot LEGO, almacenándose hasta cinco programas que se pueden cargar en su memoria interna y guardándose allí la programación básica para el control de los

distintos dispositivos que se pueden conectar al bloque, en este caso, la salida del sensor angular.

Para poder realizar un estudio detallado y un control adecuado del regulador, se utiliza Labview como herramienta de trabajo, de tal forma, que en vez de conectar el sensor al RCX, se conecta a la tarjeta de adquisición de datos del ordenador (de la cual hablaremos más adelante) y así se analizan los resultados y se controla el sistema mediante Labview.

El sensor angular proporcionado por LEGO tiene un encoder de cuatro ranuras que da 16 pulsos por revolución, lo que equivale a una medida cada $22,5^\circ$. El sensor comunica esta información al RCX mediante cuatro estados distintos.



Figura 23: Encoder Hengstler RI32 (www.hengstler.com)

Debido a la simplicidad y poca precisión del sensor LEGO, se sustituye por un encoder incremental Hengstler RI 32, como el de la Figura 23, que da 1000 pulsos por vuelta y del que se obtienen tres señales, A, B y el pulso. Los canales A y B son ondas cuadradas, desfasadas entre sí, que permiten conocer la velocidad de rotación y además el sentido de giro. El canal Z proporciona la posición absoluta del cero del eje del encoder, esta señal se presenta como un pulso cuadrado con fase y amplitud centrada en el canal A.

Además de medir el desplazamiento producido por el giro, es importante saber a qué velocidad angular está girando el eje, por lo que se coloca un segundo sensor RI 32, también de 1000 pulsos por revolución, en una de las ruedas de inercia. Habrá que tener en cuenta en los cálculos que la relación entre el motor y la rueda de inercia es de 1 a 3.

Una vez construida la maqueta se detectan problemas de estabilidad, ya que la parte superior del mecanismo, al estar suspendida en voladizo, soporta muchas vibraciones que hacen que el sistema se mueva en exceso. La solución pasa por construir una segunda torre en el otro lateral, uniendo ambas en la parte de arriba y haciendo así que el sistema sea mucho más estable y evitando las vibraciones que se ocasionaban. Con todos estos cambios en el diseño, el modelo queda como se aprecia en la Figura 24.

Otro de los problemas que aparece en el regulador es el rozamiento. Al poner el mecanismo en funcionamiento se detecta rozamiento estático, es decir que cuando se encuentra en reposo hay que vencer una resistencia inicial para poner en movimiento un cuerpo respecto del otro. Esta fricción no es lineal y se produce en los dos extremos, cuando los brazos están totalmente estirados y cuando están totalmente abiertos.

Este hecho influye en el funcionamiento del regulador, puesto que hace falta una mayor fuerza para superar esa resistencia inicial que se opone al deslizamiento, y sin embargo una vez en movimiento el rozamiento dinámico es mucho menor, haciendo que oscile más rápido, hasta que alcanza el extremo opuesto.

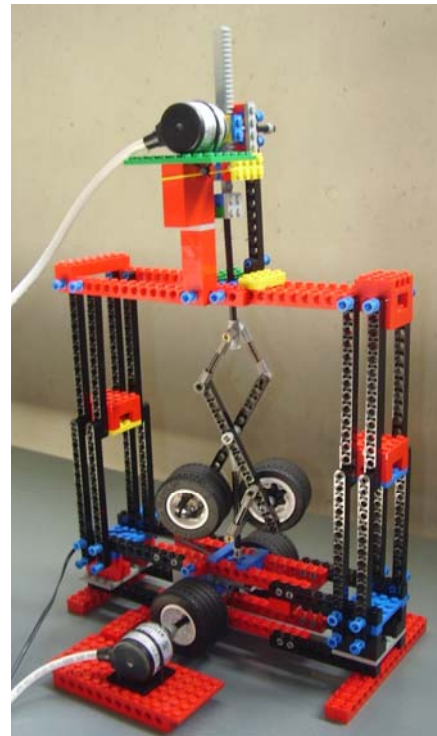


Figura 24: Regulador de Watt

El rozamiento dinámico es imprescindible para el buen funcionamiento del regulador, pero una fricción muy pronunciada reduce el movimiento, por lo que se tiene que adoptar un compromiso entre ambos casos. Para intentar reducir la fricción se engrasan las juntas y uniones.

4.4.2. SIMULACIÓN CON DATOS DEL REGULADOR

Antes de obtener resultados con el regulador construido, y una vez explicado su funcionamiento, se procede a realizar una simulación del mismo en Matlab de la forma más aproximada posible.

Para ello se utilizará el modelo estudiado en el apartado 4.1, serán analizados ambos rozamientos escogiendo primero el caso en el que el rozamiento principal se encuentra en el pasador.

Es necesario conocer ciertos parámetros reales del regulador, como son la longitud de los brazos, la masa de las ruedas y del pasador:

- Longitud brazo = 5.5 cm
- Masa de las bolas = 26.86 gr.
- Masa del pasador = 4.04 gr

Haciendo una simulación con estos datos e imponiendo una velocidad angular constante de 15 rad/s se obtiene la siguiente gráfica:

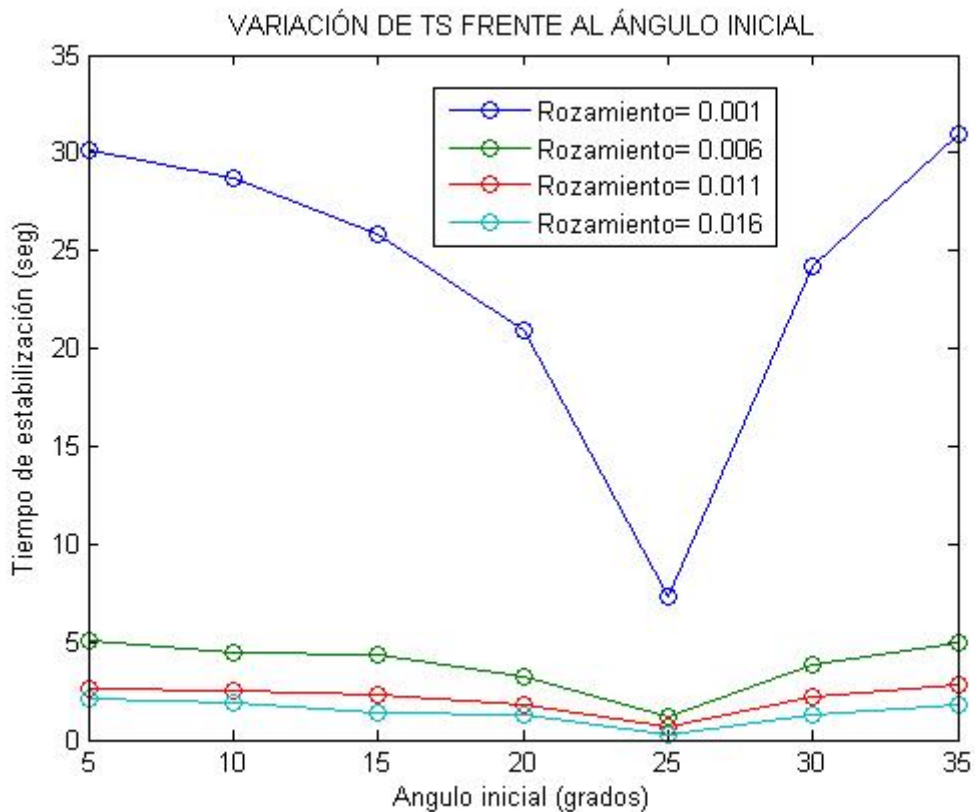


Figura 25: Ts frente al ángulo inicial, regulador

Como se aprecia en la Figura 25, el ángulo estacionario del regulador para una velocidad angular de 15 rad/s es de 24.35°. Por encima de un ángulo inicial de unos 35°, no se representan datos puesto que, para los parámetros establecidos, el sistema tiende a oscilar permanentemente, no alcanza el estado estacionario.

Con estos datos no podemos predecir qué tiempos de estabilización tendrá el regulador de Watt construido, ya que depende en gran medida del rozamiento que se produzca realmente y que desconocemos.

Una forma de solucionar los problemas debidos al rozamiento, sobretodo estático, es añadir unos pequeños pesos a las ruedas que hagan aumentar su masa. Así, tal y como se explicaba en el apartado 4.2.1, si se aumenta la masa de los contrapesos se disminuye el rozamiento, haciendo que el tiempo de estabilización sea mayor.

Veamos los resultados obtenidos de la simulación sabiendo que la masa conjunta de la rueda, que añade una pequeña bola y las bridas que lo sujetan, es: 44.61 gr.

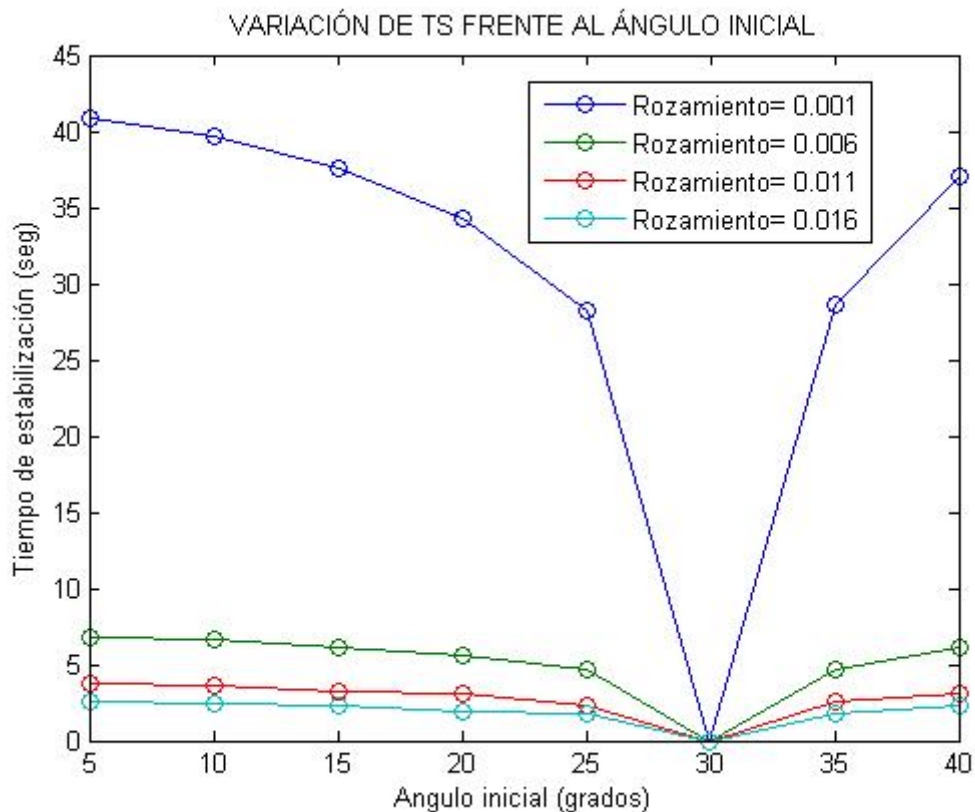


Figura 26: Ts frente al ángulo inicial, regulador con más masa

Se puede observar como el sistema tiende a 30.28° , un valor unos 6° mayor que el que se producía en el experimento anterior. De esta manera se cumple la conclusión obtenida en el apartado 4.3.2: “Mientras la masa del pasador sea despreciable frente a la masa de las bolas, una variación de estas últimas no afecta en el valor del ángulo de estabilización.” En este caso la masa del pasador supone un 15%, nada despreciable, por lo que sí que varía el valor del ángulo al que el regulador se estabiliza.

Otro aspecto que se aprecia en la Figura 26 es que las curvas tienen mayores tiempos de estabilización, como ya se había previsto al aumentar la masa de los contrapesos.

Ya se ha analizado el regulador suponiendo el rozamiento principal en el pasador, ahora se va a estudiar lo que sucede si existe fricción en la articulación a_I . Se van a analizar valores más pequeños de C_A para que los resultados sean comparables a los del pasador, puesto que C_P tiene unidades de N·s, sin embargo C_A se mide en N·m·s y la longitud de los brazos es 0.055m.

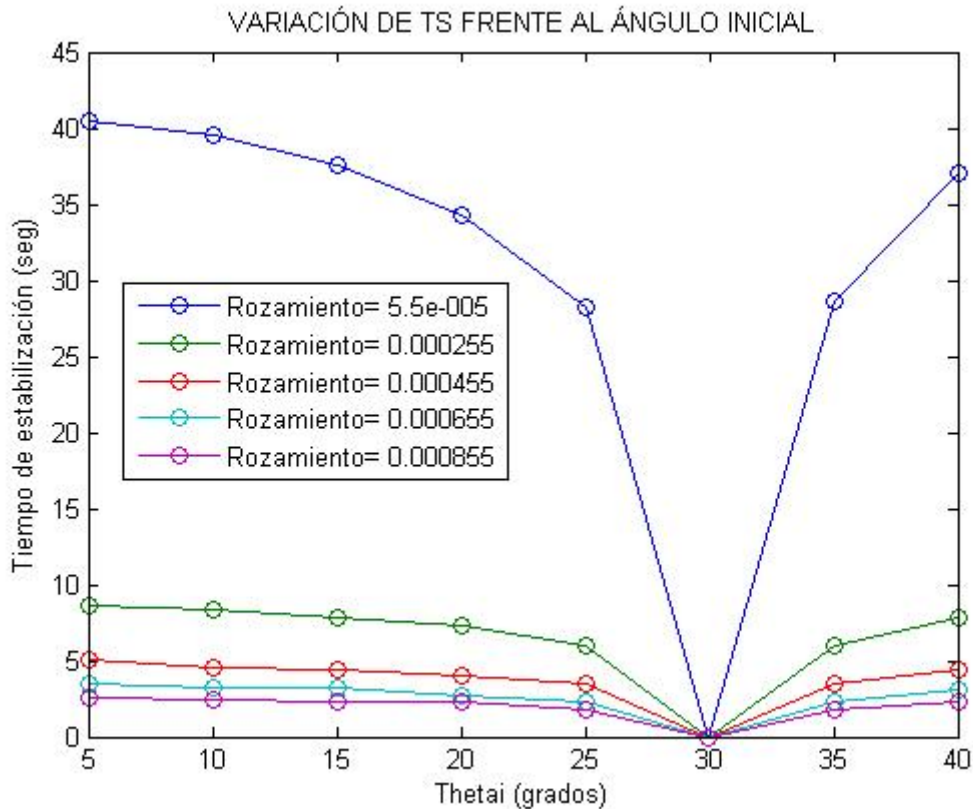


Figura 27: Ts frente al ángulo inicial para C_A , regulador

Ajustando los coeficientes de rozamiento según el término de longitud por el que está multiplicado C_A , los tiempos de estabilización son muy similares. En la Figura 27 sólo se representan valores de ángulo inicial hasta 40°, porque para datos superiores el sistema cambia y no se estabiliza.

Estas gráficas servirán a la hora de comparar los resultados teóricos de la simulación con los datos reales obtenidos con el regulador en lazo abierto, estudio que se realiza en el apartado 4.4.3. Sin embargo, el rozamiento no lineal que se produce en el regulador, no está plasmado en las ecuaciones del modelo y habrá que tenerlo en cuenta a la hora de comprobar los resultados.

4.4.3. REGULADOR DE WATT EN LAZO ABIERTO

El regulador de Watt es considerado un controlador proporcional con una ganancia K, hecho que se contrastará en el apartado 5.3 cuando el motor esté acoplado. Para estudiar su funcionamiento en lazo abierto es necesario partir de la función de transferencia, la cual se calculó en el análisis matemático:

$$\frac{\delta_{\theta}(s)}{\delta_{\omega}(s)} = \frac{\sin(2\theta_s) \cdot m_1 \cdot w_s}{(m_1 + 2 \cdot m_2 (\sin \theta_s)^2) \cdot s^2 + \left(\frac{C_A}{2 \cdot l^2} + \sin \theta_s \cdot \frac{C_P}{l} \right) \cdot s + m_1 \cdot w_s^2 \cdot (\sin \theta_s)^2} \quad \text{Ec. (4.32)}$$

Como se aprecia en la Figura 28, este es un sistema de segundo orden sobreamortiguado, con dos polos en el eje separados por una cierta distancia. El polo más cercano al origen será el más lento, mientras que el polo más alejado será el de dinámica más rápida. Este hecho se aprecia en la Figura 28, dónde se representa la respuesta del regulador frente a una velocidad angular constante.

Respuesta del regulador en lazo abierto

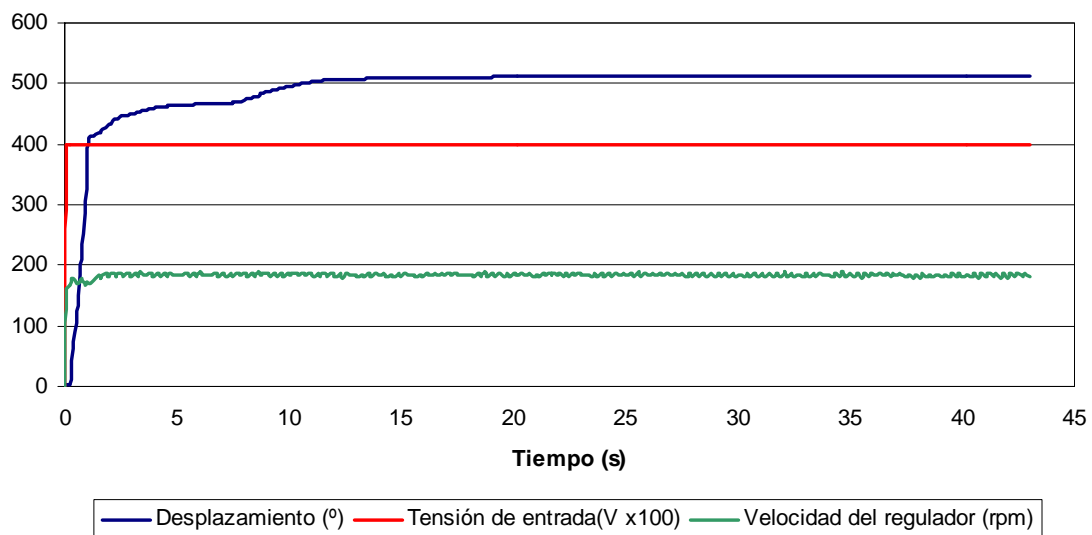


Figura 28: Respuesta del regulador en lazo abierto

La curva roja representa la tensión de entrada introducida al motor LEGO (multiplicada por 100 para que sea visible en la gráfica), en verde la velocidad del regulador en revoluciones por minuto y por último, la azul muestra los datos de desplazamiento del eje superior en grados.

En un primer momento el regulador alcanza rápidamente una posición muy cercana al estado final, ahí es el polo rápido el que está dominando el sistema. Sin embargo, luego domina el polo lento haciendo variar la posición muy despacio hasta llegar a un estado estacionario. Ese último proceso sucede en dos etapas similares siendo producido probablemente por el rozamiento no lineal del regulador.

La constante de tiempo es el tiempo que tarda el sistema en llegar al 63.2 % de su valor final, no hay una forma exacta de medir las constantes de tiempo de los dos polos, porque cada uno hace su aportación, sin embargo se puede hacer una aproximación en las zonas dominantes de cada uno. Por otro lado, también afecta el estado transitorio del regulador, como se aprecia en la curva verde, la velocidad no se estabiliza instantáneamente, si no que tarda unos 2 segundos que afectan al desplazamiento.

Por tanto, midiendo la constante de tiempo aproximada en la zona con mayor pendiente se obtiene un valor de 0.7615 segundos, mientras que en la parte lenta son 7.18 segundos.

La función de transferencia de un sistema de segundo orden está definida según la siguiente ecuación:

$$T = k \frac{W_n^2}{s^2 + 2\zeta W_n s + W_n^2} \quad \text{Ec. (4.33)}$$

Donde w_n es la frecuencia natural, ζ es el coeficiente de amortiguamiento relativo y k es la ganancia del sistema.

Lo que nos interesa es poder comparar los resultados teóricos y experimentales para así poder obtener conclusiones sobre el estudio realizado. Por un lado se calculan los polos del sistema de primer orden, mediante la inversa de las constantes de tiempo obtenidas.

Por otro lado se obtienen los polos teóricos de la función de transferencia, introduciendo los parámetros del regulador utilizados hasta ahora: $w_s = 15 \text{ rad/s}$, $\theta_s = 30.28^\circ$, $l = 0.055 \text{ m}$, $m_1 = 0.04461 \text{ kg}$, $m_2 = 0.00404 \text{ kg}$.

El resultado que se obtiene es una ecuación dependiente de los dos coeficientes de rozamiento:

$$165.3 \cdot C_A + 9.17 \cdot C_P = 0.0678 \quad \begin{array}{l} C_A = 0 \Rightarrow C_P = 0.0074 \text{ N}\cdot\text{s} \\ C_P = 0 \Rightarrow C_A = 0.00041 \text{ N}\cdot\text{m}\cdot\text{s} \end{array} \quad \text{Ec. (4.34)}$$

Por lo tanto se deduce que los valores máximos son de 0.0074 N·s cuando el rozamiento se produce en el pasador y de 0.00041 N·m·s cuando se da en la articulación a_1 .

Se elige un valor de ángulo inicial de unos 20°, ya que la magnitud de las masas impide que el regulador se cierre por completo.

Con estos valores de rozamiento, se observan las gráficas 26 y 27 del apartado anterior 4.4.2., y se obtienen conclusiones sobre ambos rozamientos.

Para un coeficiente de rozamiento máximo en la articulación de 0.00041 N·m·s, los tiempos de estabilización son de unos cinco segundos. Por otro lado, para un rozamiento producido en el pasador de 0.0074 N·s se ofrecen unos tiempos de estabilización muy similares, en torno a los seis segundos.

Por lo que se puede decir que la fricción en ambos puntos parece influir de forma similar en el comportamiento del sistema.

Observando a simple vista el funcionamiento del regulador no se aprecia este estado transitorio, si no que las masas directamente se sitúan en un ángulo determinado, en estado estacionario, lo que hace pensar que el tiempo de estabilización será inferior a un segundo. Por lo que observando las gráficas correspondientes a la simulación del regulador (Figura 26 y 27) se concluye que el rozamiento tanto en el pasador como en la articulación parece que debería de ser mayor de lo establecido en la Ec. (4.34), así los tiempos de estabilización serían más bajos.

Además, hay que recordar que en dichas gráficas no se está considerando el rozamiento no lineal existente en el regulador, un aspecto que influye mucho en su comportamiento pero que no tenemos forma de cuantificar.

La ganancia K del sistema está definida por la siguiente ecuación: $K = \frac{2}{w_s \tan \theta_s}$

donde la velocidad y el ángulo estacionarios están relacionados según una ecuación obtenida en apartados anteriores: $w_s^2 = \frac{g \cdot (m_1 + m_2)}{l \cdot m_1 \cdot \cos \theta_s}$. Por lo tanto K depende del punto de trabajo elegido, de las masas, la gravedad y la longitud. En el caso del regulador construido y con una velocidad angular de 15 rad/s, $K=0.114$.

Es difícil llegar a una conclusión definitiva debido a los muchos factores que influyen en el regulador. El sistema es no lineal y por tanto, todos los análisis se realizan en torno a un punto concreto de trabajo, definido por la velocidad de giro del regulador. Además, la respuesta obtenida en la Figura 28 no es la misma para cualquier tensión de entrada al regulador, si no que éste tiene un offset de unos 3 V y las constantes de tiempo pueden ser distintas.

Otro aspecto a tener en cuenta es que la respuesta del regulador en lazo abierto es distinta cuando se trata del flanco de subida y del de bajada. La Figura 29 muestra la respuesta del regulador frente a una tensión en forma de escalón durante tres ciclos, donde la curva negra representa el desplazamiento en grados del encoder y la roja es la tensión introducida al motor LEGO (multiplicada por 100). En ella se observa una diferencia considerable entre la curva ascendente y descendente de desplazamiento, esto es debido a que tanto el sistema como los rozamientos son no lineales.

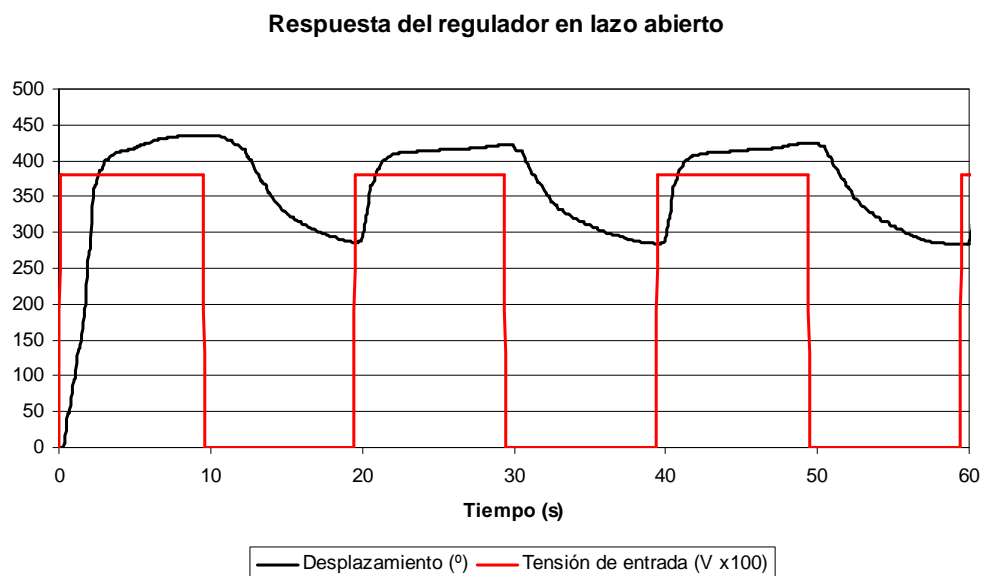


Figura 29: Respuesta del regulador en lazo abierto, tres ciclos

4.5. APLICACIÓN DEL REGULADOR DE WATT A UN MOTOR

En este apartado se llevará a cabo el acoplamiento del regulador de Watt, construido mediante LEGOs a una maqueta que simula un motor de vapor, pero funciona con aire comprimido. El objetivo principal es regular la entrada de aire comprimido al motor para mantener la velocidad del mismo constante.

4.5.1. EL MOTOR

El motor que se va a utilizar es el que se muestra en la Figura 30, se encuentra en el Laboratorio de Automática y se denomina “CE7 Control de Velocidad de un Motor”. Esta maqueta representa un motor de vapor, aunque se impulsa mediante aire comprimido a través de una válvula por motivos de seguridad.



Figura 30: Motor para control de velocidad

El suministro de aire necesario para hacerlo funcionar es de 2 bares, con un caudal de aproximadamente $8.5 \text{ m}^3/\text{h}$. El vapor es un lubricante natural, pero al utilizar aire habrá que añadir aceite para que el motor no se agarrote.

El sistema está compuesto por dos aparatos, por un lado la maqueta en sí (Figura 30), donde se encuentra propiamente el motor y por otro lado un controlador o bloque de mediciones (Figura 31).

El motor está compuesto por una válvula manual a la entrada que permite establecer y limitar la presión que proviene del compresor. Seguidamente se encuentra un pequeño tanque que contiene aceite, éste se mezcla con el aire para actuar como lubricante.

Después hay una válvula motorizada, que se alimenta desde el bloque de mediciones, de forma que para tensiones positivas se abrirá y para negativas se cerrará. El rango en el que se puede actuar es desde -10 V hasta 10 V, la válvula se abrirá más deprisa para valores cada vez más positivos y análogamente se cerrará más deprisa para valores cada vez más negativos. En el eje existente entre el motor y la válvula, hay un potenciómetro capaz de medir la posición de la válvula y mandar la información de vuelta al controlador.

Por último está ubicado el motor de cuatro cilindros verticales, su velocidad es medida mediante un tacómetro consistente en contar los pulsos de un disco ranurado que gira solidariamente con el motor. Existe una carga que actúa sobre la velocidad del motor, creando un rozamiento que lo haga frenar, éste se puede incrementar o disminuir desde el bloque de mediciones.

El motor está conectado al controlador que permite obtener dos salidas analógicas y a su vez, actuar sobre una entrada analógica y la carga, tal y como se aprecia en la Figura 31.

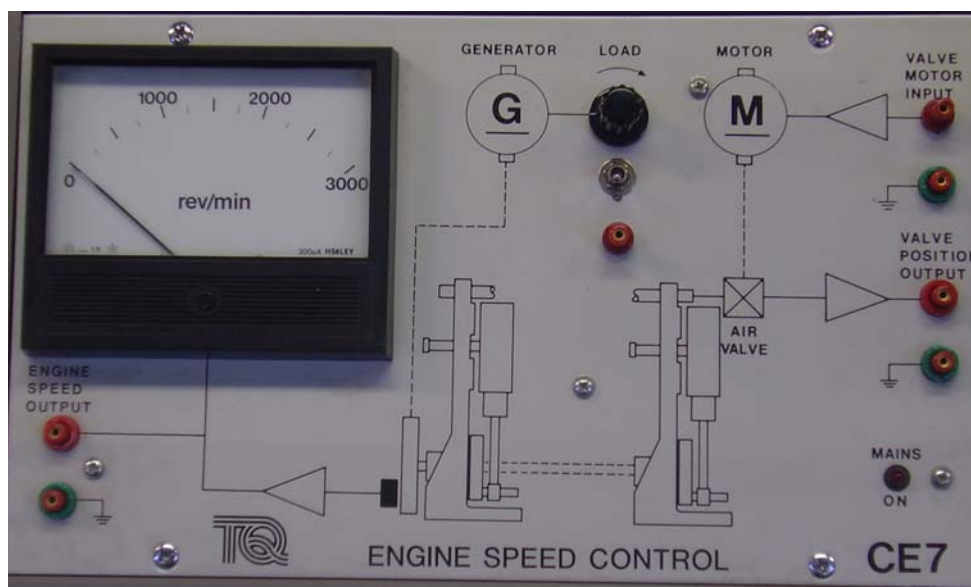


Figura 31: Controlador

Una de las salidas es la velocidad de giro, en la fotografía está situada en la parte izquierda: “Engine Speed Output”, aparece mostrada en un display donde se muestran las revoluciones por minuto de 0 a 3000 rpm y también mediante unos bornes de los cuales se obtiene una tensión de entre 0 y -10V. La segunda salida analógica da el valor de la posición de la válvula entre ± 10 V, está ubicada en la parte derecha del controlador con la etiqueta “Valve Position Output”.

El controlador tiene una sola entrada, es para mover la electroválvula y tiene un rango desde -10 V hasta 10 V, como se ha dicho anteriormente para tensiones positivas se abre y para negativas se cierra. Se encuentra en la parte derecha del bloque nombrada como “Valve Motor Input”.

Por último, en el centro hay un botón negro giratorio que permite manipular la carga del motor, actuando como un freno. Para que no influya en el comportamiento del sistema habrá que mantenerlo totalmente abierto, es decir, el botón girado en sentido antihorario hasta su tope y si por el contrario se desea frenar la velocidad de los cilindros, se girará el botón en sentido horario.

No existe forma de medir la carga que se le está introduciendo al sistema, por ello surge la idea de habilitar un borne en el bloque de mediciones que permita al usuario introducir una tensión a la carga. Se realizan diferentes ensayos aplicando distintos voltajes al circuito y finalmente se concluye un rango de actuación entre 0 y 6 voltios, para cero voltios no hay carga, mientras que para seis voltios el sistema está con carga máxima. Finalmente, se coloca un pequeño interruptor que permite al usuario elegir entre la opción manual o la aplicación de una tensión en el borne.

En este caso se elegirá la segunda opción y se introducirá un voltaje desde Labview, así se podrá programar el tipo de señal: sinusoidal, constante o cuadrada; la frecuencia; el ancho de pulso y la tensión que se aplicará a la carga.

La forma de conectar el controlador de la maqueta motor a Labview es mediante una tarjeta de adquisición de datos, en concreto el modelo utilizado es PCI-6251, como la que se aprecia en la Figura 32.

Dicha tarjeta consta de dos canales analógicos de salida y 16 de entrada, ambos con una resolución de 16 bits; también tiene 24 canales digitales bidireccionales y dos contadores de 32 bits.

La tarjeta está insertada en el ordenador de tiempo real, por lo que el medio de conexión entre la tarjeta y la maqueta será una placa que adapta las entradas y salidas de la tarjeta a los bornes de tensión.



Figura 32: Tarjeta de adquisición de datos PCI-6251

Para poner en marcha el motor se utiliza un compresor de aire que cumple con las características requeridas (presión de 2 bares y con un caudal aproximado de $8.5 \text{ m}^3/\text{h}$) y tiene una toma de aire localizada en el mismo laboratorio. Habrá que tener en cuenta a la hora de analizar los experimentos que el compresor es de baja calidad y no se garantiza un caudal de aire ni una presión uniforme a lo largo del tiempo, sino que variará.

Antes de poner el motor en funcionamiento, hay que lubricar desde el exterior las manivelas que lo componen, para engrasar el sistema y reducir rozamientos. También hay que asegurarse de que todas las tuercas que facilitan los acoplamientos de los tubos con la maqueta están perfectamente enroscadas con teflón y así impedir escapes de aire que reduzcan la presión final.

Para conocer mejor el motor se lleva a cabo una caracterización de las entradas y salidas analógicas, así se comprobarán los rangos de tensiones que se van a manejar.

4.5.1.1. Experimento nº 1

El primer experimento consiste en obtener la relación existente entre la posición de la válvula y la velocidad del motor. Mediante una fuente de continua se aplica un voltaje positivo a la entrada analógica de la válvula motor, de tal magnitud que la haga girar

hasta estar totalmente abierta. Después se mide mediante un voltímetro la salida que representa la posición de la válvula, y deberá ser de aproximadamente 9V (según el manual de usuario de dicho sistema), es decir, abierta completamente y el motor girando a su velocidad máxima.

Una vez que la maqueta está puesta a punto, se va cerrando la válvula y tomando datos de su respectiva velocidad. La gráfica que aparece en la Figura 33 es la representación del ejercicio realizado.

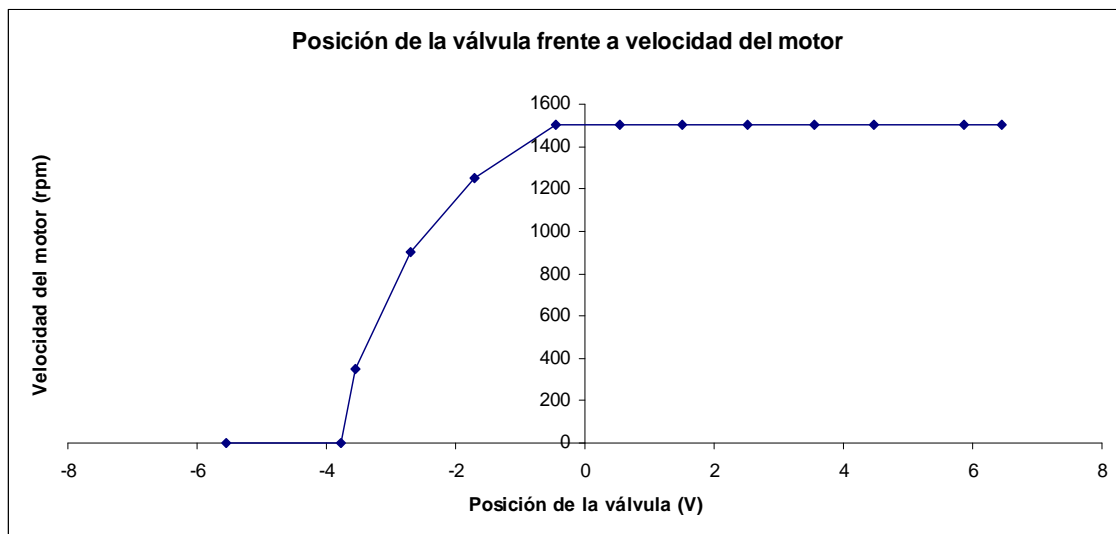


Figura 33: Posición de la válvula frente a velocidad del motor

Se aprecia como el rango teórico que ofrece el manual de ± 10 V no encaja con el funcionamiento real. La salida analógica que da la medida de la posición de la válvula no marca 9 V, sino 6.45 V cuando está totalmente abierta y -5.56 V cuando está cerrada. Además existe un desplazamiento respecto del cero, esto es una falta de simetría que se suele denominar offset.

Por otro lado, se observa que la velocidad de rotación del motor es prácticamente la misma, unos 1500 rpm, desde que la válvula está abierta a 6.45 V hasta que queda cerrada a la mitad de su rango, aproximadamente 0 V. A partir de ahí, el ciclo de cierre de la válvula hace que la velocidad disminuya rápidamente hasta parar el motor, momento en el que la posición de la válvula es -3.78 V, es decir, aún habiendo cierto caudal de aire, no es suficiente para que el motor siga funcionando, aunque la válvula no esté completamente cerrada.

De esta gráfica se extrae una conclusión muy importante, la zona en la que el movimiento de la válvula es efectivo no es realmente ± 10 V, sino que es mucho más reducida, aproximadamente desde -4 a 0 V. A la hora de regular la velocidad del motor será necesario tener esto en cuenta para considerar sólo el rango efectivo.

4.5.1.2. Experimento nº 2

El segundo experimento trata de conseguir la relación entre las dos salidas analógicas de la velocidad: el display y la tensión de los bornes. Para ello hay que partir de un estado en el que el motor trabaje a máxima velocidad e ir disminuyéndola (en este caso en escalones de 100 rpm) anotando los respectivos datos. Teóricamente la relación es lineal.

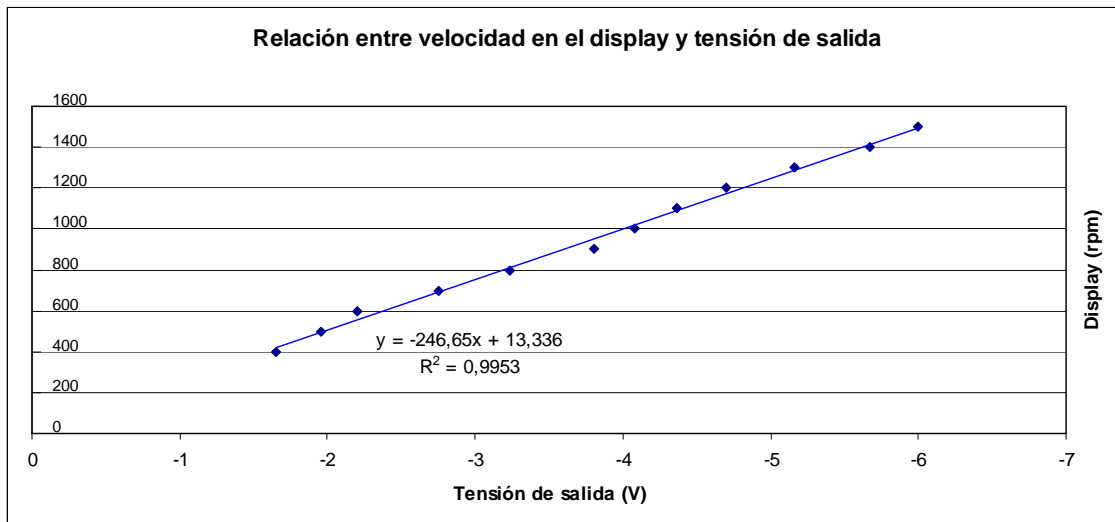


Figura 34: Relación entre display y tensión de salida de velocidad del motor

La gráfica obtenida es la representada en la Figura 34. Se comprueba que la relación entre ambas señales es prácticamente lineal, con un coeficiente de linealidad de 0.9953 y siendo la ecuación:

$$y = -246,65x + 13,336 \quad \text{Ec. (4.35)}$$

Por otro lado, se asume que todas las no linealidades son debidas a imprecisiones durante la realización del ejercicio. Por ejemplo, el display que muestra la medida de la velocidad no tiene una escala apropiada para tomar datos cada 100 rpm.

4.5.1.3. Experimento n° 3

El tercer experimento consiste en medir la zona muerta de la válvula, para ello basta con situarse en la posición intermedia de la válvula, incrementar el voltaje de entrada y anotar el valor para el cual la válvula empieza a girar. Después hay que repetir el ejercicio para valores negativos. El valor de la zona muerta es de 2.72 V, 1.4 para valores positivos (abriendo la válvula) y 1.32 V para valores negativos (cerrándola).

La zona muerta de la válvula es el valor de tensión para el cual ésta comienza a moverse, sin embargo, esta zona varía dependiendo de varios factores: la posición de la válvula y la resistencia del aire comprimido.

Si el experimento se realiza en una posición intermedia de la válvula, la zona muerta es pequeña puesto que hay menos rozamiento, sin embargo, si el ejercicio se realiza en una zona próxima a uno de los extremos la zona muerta se incrementa considerablemente.

Otro de los factores que influye en la medición de la zona muerta es la carga que exista en ese momento en el tubo. El experimento n° 3 se ha realizado sin aire en el sistema, pero en ensayos posteriores se ha comprobado que la zona muerta llega a triplicarse cuando hay aire en circulación. Este comportamiento es normal debido a que el aire presente en el circuito se opone al cierre de la válvula y se necesita más fuerza para moverla. Sin embargo, a la hora de abrir la válvula la zona muerta no es tan grande.

4.5.2. ACOPLAMIENTO DEL REGULADOR AL MOTOR

Una vez que el motor y el Regulador de Watt han sido estudiados en sí mismos, hay que combinarlos para comprobar si realmente el péndulo hace su función, regular la velocidad del motor. Para ello hace falta acoplar las diversas partes del sistema, que en este caso no será mediante conexiones mecánicas (correas y sistemas de palancas) como lo hacía Watt en su época, sino que serán acoplamientos eléctricos. El siguiente esquema muestra como está conectado el sistema:

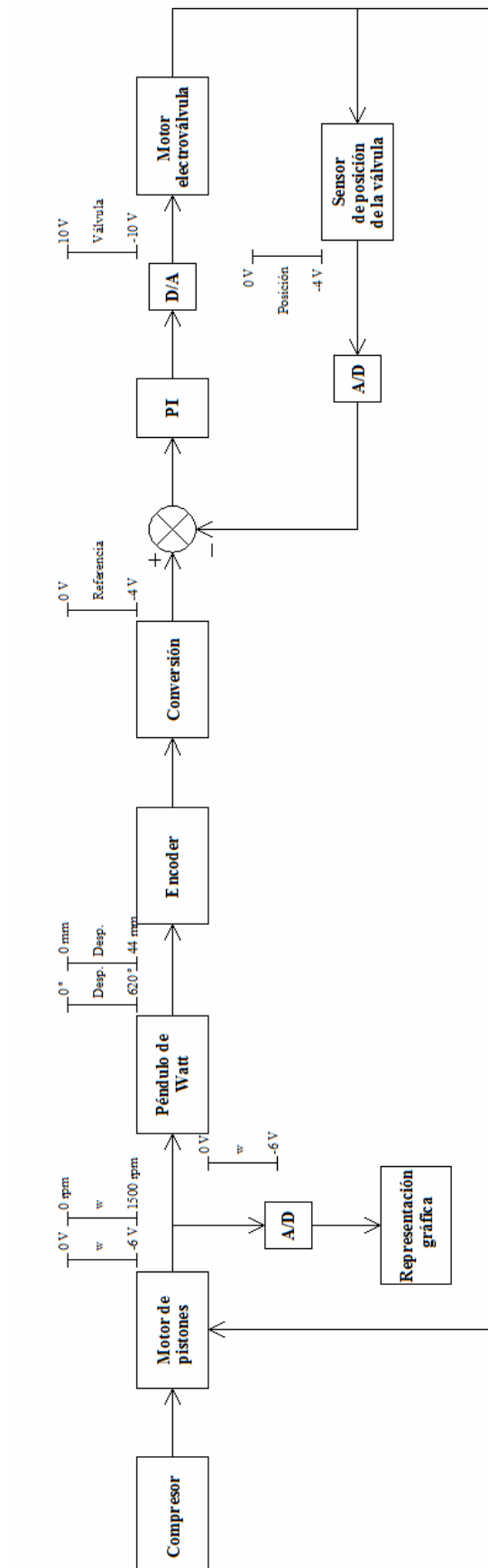


Figura 35: Esquema de acoplamiento entre el regulador y el motor

El esquema mostrado en la Figura 35 representa en términos generales todas las conexiones que se realizan para acoplar el Regulador de Watt a la maqueta motor. También aparecen los rangos de tensión que se obtienen en las distintas entradas y salidas, para así entender mejor el acomodamiento que se ha de realizar.

A continuación se va a ir analizando el esquema por partes. El compresor es el encargado de suministrar aire comprimido al motor, el cual dependiendo del caudal de fluido que llegue hasta sus pitones girará a una velocidad u otra. La salida analógica que da la medida de la velocidad de rotación de la máquina está comprendida entre -6 y 0 V, dónde 0 V corresponde al motor parado, 0 rpm y por otro lado, -6 V implica velocidad máxima, aproximadamente 1500 rpm. Esta velocidad se introduce en la tarjeta de adquisición para posteriormente representar los datos en Labview.

La velocidad del motor de aire comprimido debe ser conectada al motor LEGO para que éste haga girar el regulador de forma proporcional, cuanto más rápido gire el motor de aire más rápido girará el motor del péndulo. Dicho motor acepta tensiones entre ± 9 V, siendo las negativas en el sentido de giro opuesto.

Para saber como afecta la tensión del motor LEGO al regulador, la Figura 36 muestra dos curvas que representan la velocidad de giro del regulador (en negro) y el desplazamiento del eje superior (en rojo) dependiendo de la alimentación del motor de LEGO.

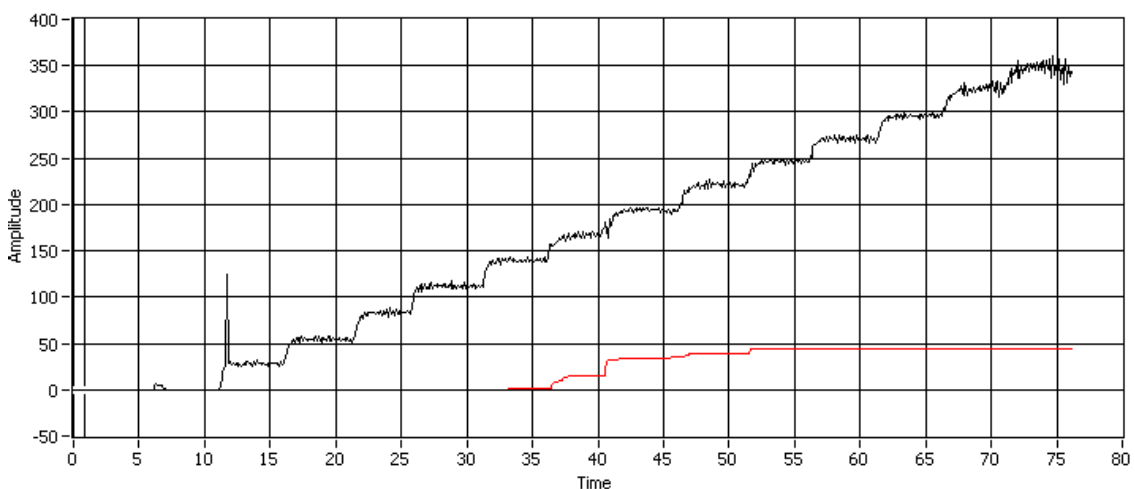


Figura 36: Velocidad (en rpm) y desplazamiento (en mm) dependiendo de la alimentación (en voltios).

La curva de color negro representa la velocidad a la que gira el regulador dependiendo de la tensión a la que el motor LEGO esté alimentado, empezando en cero voltios y aumentando cada aproximadamente cinco segundos en medio voltio. En la gráfica se aprecia que hace falta un voltio para hacer que el regulador empiece a girar, posteriormente va aumentando la velocidad a medida que aumentan los voltios y una vez que llega al último escalón representado, que son siete voltios, las vibraciones del mecanismo son muy grandes como para continuar con el experimento.

Por lo tanto, podemos concluir que el regulador trabaja en un rango entre 1 y 7 voltios, llegando a alcanzar 350 revoluciones por minuto.

La curva roja mostrada en la Figura 36 representa el desplazamiento del eje superior del regulador dependiendo de la velocidad de giro del regulador (y por tanto de la tensión de alimentación). Para observarlo detalladamente, la Figura 37 muestra únicamente esta curva.

Una vez sobrepasados los tres voltios, empieza a desplazarse muy lentamente, habiendo cambios muy bruscos de desplazamiento conforme aumenta la tensión. A partir de cinco voltios el eje llega a su tope, 44 mm, y se mantiene ahí mientras la tensión no disminuya.

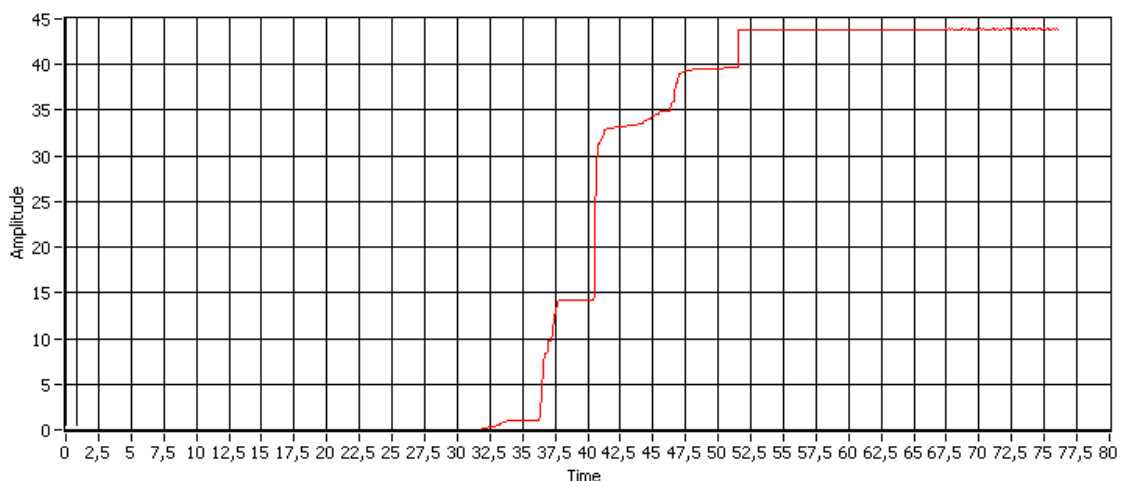


Figura 37: Desplazamiento (en mm) dependiendo de la alimentación (en voltios).

El rango de alimentación que hace mover al eje superior del regulador oscila entre 3 y 5 voltios. Cabe decir que esta gráfica no es siempre igual, las cotas fluctúan dependiendo de si se encuentra en una situación de arranque (la de la gráfica), en la que existe un gran rozamiento estático o por el contrario, el regulador ya está en funcionamiento.

Con todos estos experimentos y sus respectivos razonamientos ya se puede justificar que la adaptación directa de ambas conexiones es lo más apropiado para este caso. Así, recordando el esquema, se obtiene una tensión correspondiente a la velocidad de rotación del motor de aire de $[-6, 0]$ V y se introduce directamente en el motor LEGO del péndulo de Watt.

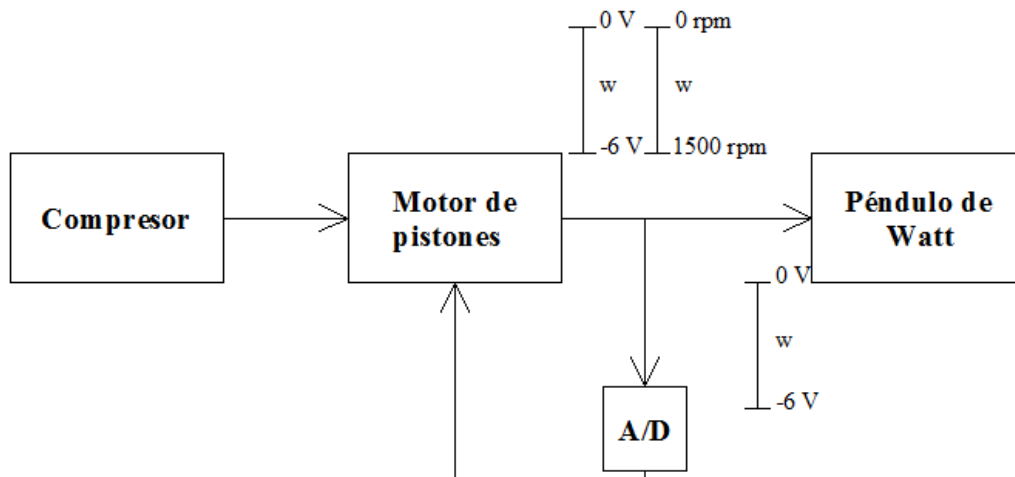


Figura 38: Acoplamiento entre la velocidad del motor y el Regulador de Watt.

La señal obtenida del controlador no tiene suficiente potencia como para mover el motor del péndulo, por lo que se utiliza un amplificador de potencia con protección contra sobrecorriente, en este caso, tarado a 1 A.

Como se muestra en la Figura 39, la velocidad de giro del regulador provocará un desplazamiento lineal en el eje superior, mediante unos engranajes se transforma el movimiento lineal en angular, el cual es medido por un encoder. El contador mide los grados que el eje ha girado en un rango de $[0, 620]$ °, por lo tanto sabiendo según las características de los engranajes que el desplazamiento lineal es de 25.41 mm/vuelta, el rango equivalente en movimiento lineal será de $[0, 44]$ mm.

El encoder es conectado a la tarjeta de adquisición, mediante la cual se obtienen los datos en el programa realizado con Labview. Esta señal será la referencia de un lazo de realimentación en el cual el objetivo final es abrir o cerrar la válvula que permite la entrada de aire a los pistones. El rango en voltios de la referencia debe ser $[-4, 0]$ V ya que la señal realimentada es la posición de la válvula, que como ya se verá más adelante tendrá este mismo rango.

La conversión que aparece en la Figura 39 sirve para acoplar la señal que da el encoder al rango deseado. Cuando el contador mide 0° significa que el regulador está parado o girando a una velocidad muy baja o nula, entonces la referencia deberá ser de apertura de la válvula, si por el contrario el encoder mide 620° , el regulador está girando a su velocidad máxima y por lo tanto la referencia debe suponer que la válvula se cierre. En términos de tensión esto se traduce en 0 V cuando la válvula está abierta y -4 V cuando está totalmente cerrada.

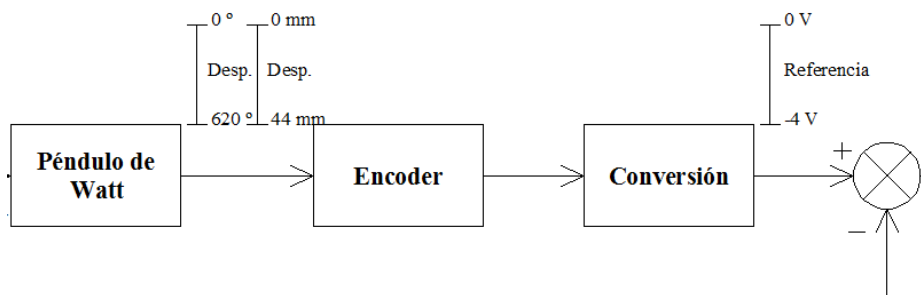


Figura 39: Acoplamiento del desplazamiento lineal a la referencia.

El motivo por el cual se elige este rango de -4 a 0 voltios radica en la Figura 33, de la cual se obtuvo la conclusión de que éste es el rango efectivo de la válvula, dicho margen es el que se elige para la señal de referencia.

La siguiente parte del esquema trata de explicar el acoplamiento entre el movimiento que produce el péndulo, ya traducido en la señal de referencia, y la electroválvula que permite la entrada de aire comprimido. Lo ideal sería poder traducir la tensión deseada en una posición determinada de la válvula, sin embargo, la maqueta del motor no nos permite introducir posición sino velocidad de apertura o cierre de la válvula. Debido a este pequeño inconveniente se precisa de un lazo de realimentación como el de la Figura 40.

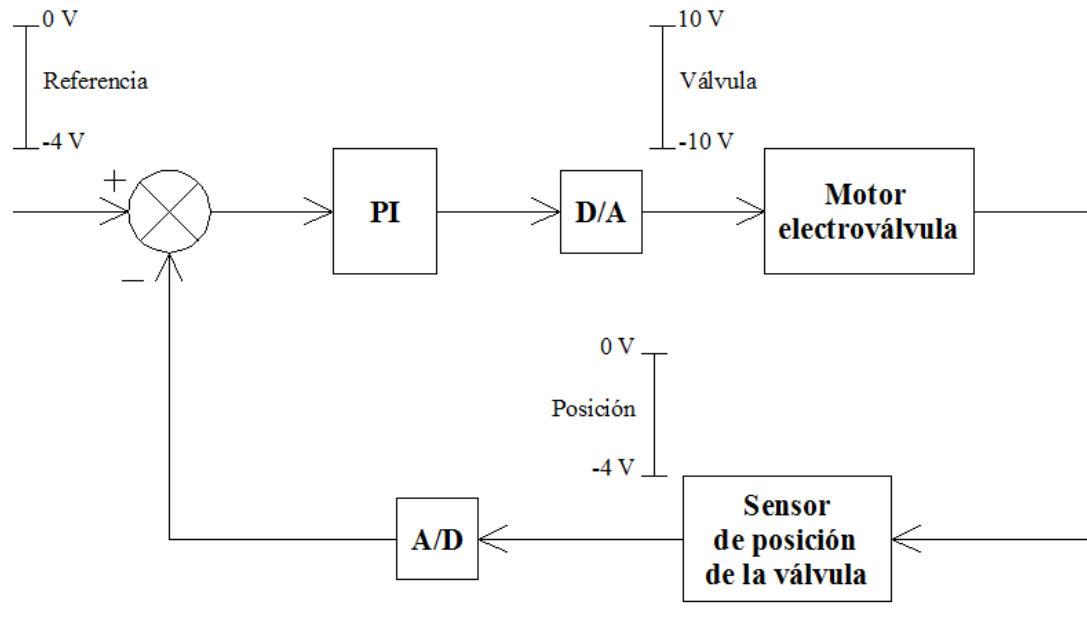


Figura 40: Realimentación que posiciona la válvula

La realimentación consta de una señal de referencia que ya ha sido analizada anteriormente, una señal de realimentación que indica la posición real de la válvula, un bloque de control PI (proporcional integrador) y el motor eléctrico que mueve la válvula.

La posición actual de la válvula se obtiene mediante un potenciómetro, del que se obtiene un rango de tensión entre -5.56 V cuando está cerrada y 6.45 V cuando está abierta. Sin embargo, debido al margen efectivo de la válvula que ya se ha comentado, la posición variará en un rango más reducido, entre -4 y 0 V. Este voltaje se introduce en la tarjeta de adquisición para ser leído en el programa y posteriormente realimentado.

El PI consiste en un control proporcional e integrador, con una ganancia y un tiempo de integración que deberán ser ajustados a la hora de realizar los experimentos. En un principio, se propuso un control únicamente proporcional, pero los resultados contenían un error en estado estacionario que el integrador trata de eliminar.

El objetivo final de esta realimentación es mover la válvula que permite la entrada de aire comprimido, esto se hace introduciendo una tensión al motor que gobierna la electroválvula. El voltaje que se puede introducir oscila entre $\pm 10V$, dónde valores positivos la abren y negativos la cierran. Mediante la ganancia del controlador proporcional habrá que ajustar el rango del error al margen admitido por el motor.

Por último, la válvula se abre o se cierra, dejando pasar más o menos aire y actuando directamente en la velocidad de giro de los pistones, volviendo al principio del sistema y creando un lazo cerrado.

Una vez acoplado el regulador de Watt a la maqueta del motor de aire, se realizarán diversos experimentos para comprobar su funcionamiento y analizar si el péndulo controla correctamente la velocidad del motor. Los resultados de dichos experimentos se muestran en el apartado 5.

5. ANÁLISIS DE RESULTADOS

En este apartado se mostrarán los resultados de varios de los experimentos realizados con el sistema ya acoplado. Se han realizado dos tipos de ejercicios, unos para estudiar el comportamiento en estado estacionario y otros para analizar la respuesta frente a una perturbación.

5.1. COMPORTAMIENTO EN ESTADO ESTACIONARIO

Para analizar el comportamiento del sistema en estado estacionario se pondrán en marcha todos los mecanismos y se dejará un tiempo determinado para ver como actúa.

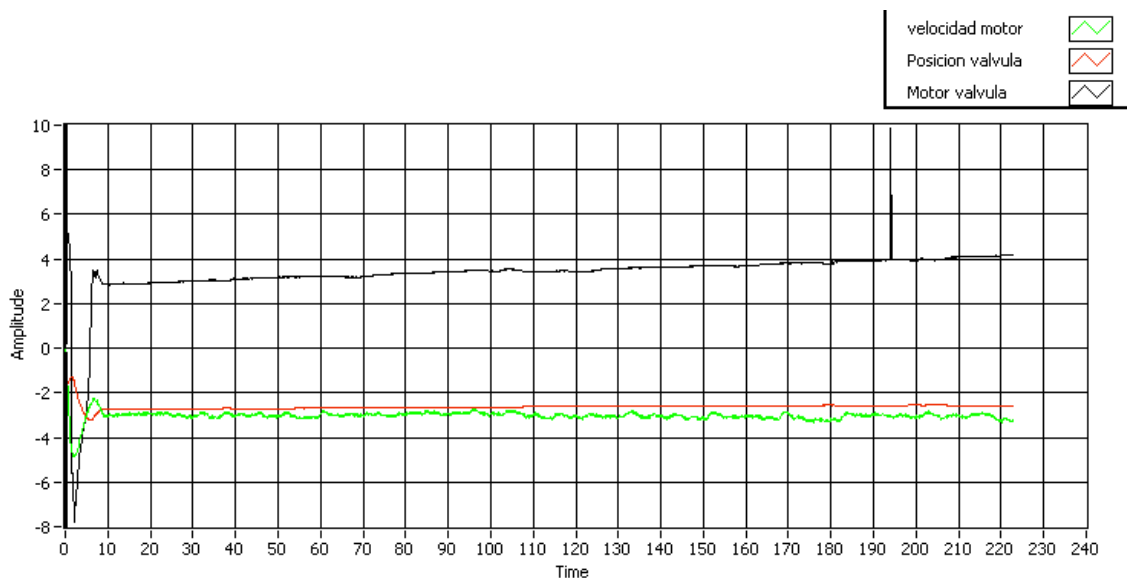


Figura 41: Prueba en estacionario

La gráfica que aparece en la Figura 41 muestra un ejercicio realizado con una ganancia de 3.2 y un tiempo de integración de 5 segundos, establecidos después de haber ensayado distintos valores en los experimentos. Tal y como está representado en la leyenda, la curva verde es la correspondiente a la velocidad del motor de pistones, la roja indica la posición de la válvula y la negra es la acción de control, es decir, la tensión introducida a la válvula motorizada.

Aunque la velocidad del motor se controla aproximadamente en los primeros diez segundos, a partir de ahí el integrador hace que el error que existe se vaya corrigiendo.

De esta forma, la velocidad del motor está en -3.2 voltios y el motor tiende a abrir la válvula un poco más, tendiendo hacia los -3.5 voltios (850 rpm).

Inicialmente hay un pequeño periodo de tiempo, unos 10 segundos, en los que se dan oscilaciones. Haciendo un zoom en ese intervalo, Figura 42, el motor parte de un estado de reposo, por lo que la posición de la válvula tiende a abrirse. Rápidamente empieza a entrar aire y el motor coge velocidad, se pasa de la velocidad idónea y el regulador lo corrige, cerrando la válvula y haciendo que la velocidad, después de 10 segundos sea de -3.2 voltios. En la Figura 34 se calculaba la equivalencia en revoluciones por minuto, siendo en este caso de unas 800 rpm.

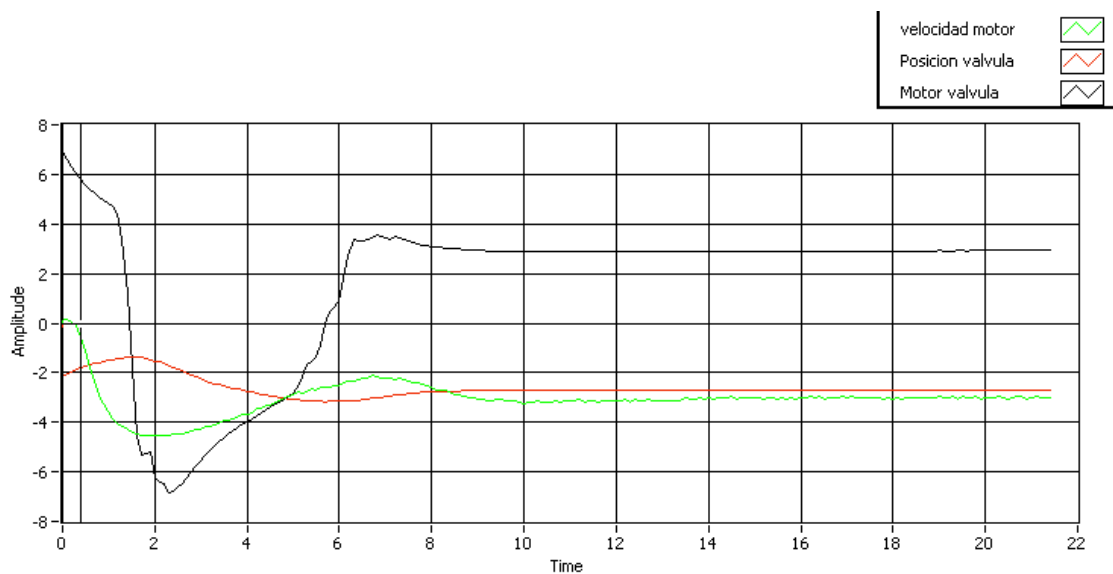


Figura 42: Zoom de prueba en estacionario

Por otro lado, en la Figura 41 se aprecia un pico de tensión en la señal que se le proporciona a la electroválvula, este proviene del sensor angular que mide el desplazamiento en el regulador de Watt y que sin motivo aparente produce un aumento repentino de la tensión. Afortunadamente y como se aprecia en la gráfica, este recurrente error del sensor no afecta a la posición de la válvula.

5.2. RESPUESTA DEL REGULADOR FRENTE A PERTURBACIÓN

El experimento consiste en dejar estabilizarse al sistema hasta que la velocidad del motor sea aproximadamente constante. Después se introducirá un freno en forma de escalón para simular una perturbación, un cambio repentino e inesperado que en este caso hará que el motor vaya más lento y de esta forma el regulador centrífugo deberá abrir la válvula para que entre más aire y el motor vuelva a girar a la misma velocidad. Finalmente se retirará el freno y el sistema volverá a recuperarse de esa perturbación.

La señal de carga será como la que se muestra en la Figura 43, una forma de onda cuadrada, con un ancho de pulso del 50% y una frecuencia suficiente para que le de tiempo al motor a estabilizarse, en este caso 0.02 Hz, dando así un tiempo de 50 segundos por ciclo, es decir, 25 segundos para que la velocidad sea regulada.

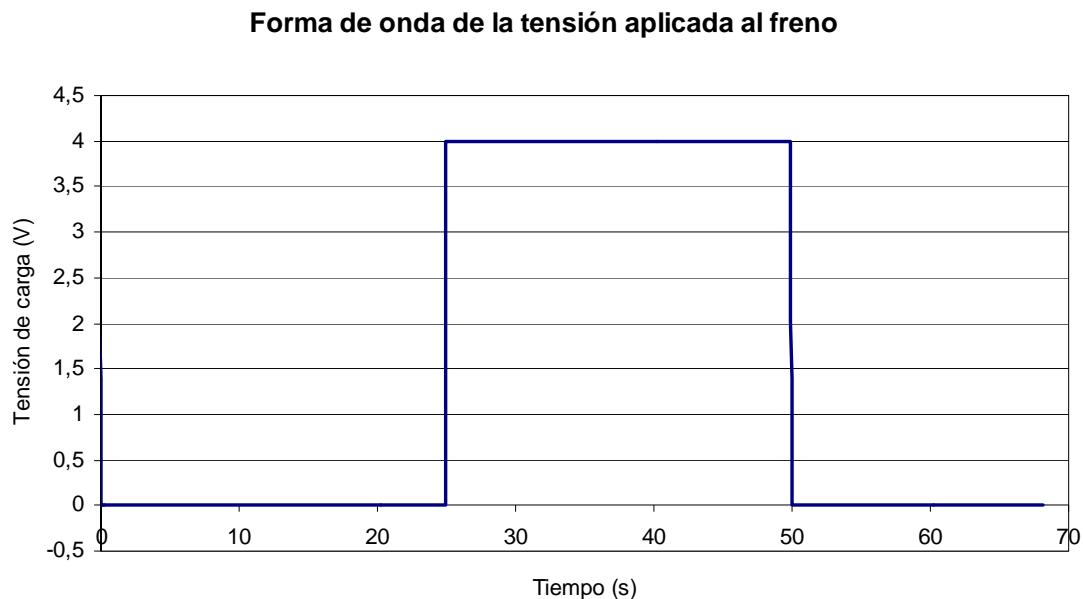


Figura 43: Forma de onda del freno

Después de realizar varios experimentos y analizar su respuesta, la ganancia y el tiempo de integración del PI se ajustan a una ganancia de tres y un tiempo de seis segundos, respectivamente. Con el primero conseguimos abarcar todo el rango de acción de control entre -10 y 10 V, mientras que con el segundo establecemos un tiempo de respuesta adecuado para el sistema.

La Figura 44 muestra en azul la velocidad del motor de pistones a lo largo del experimento, el eje y representa la tensión que da la salida analógica del bloque de medición en voltios, mientras que el eje x representa el tiempo en segundos. En rojo se puede observar la acción del freno, siendo cero voltios sin carga y 4 V, carga máxima. Inicialmente se abre la válvula manual de entrada de aire y el motor pasa de un estado de reposo a trabajar a velocidad máxima, el regulador efectúa su función y regula la velocidad hasta estabilizarse a -3 V, unas 750 rpm.

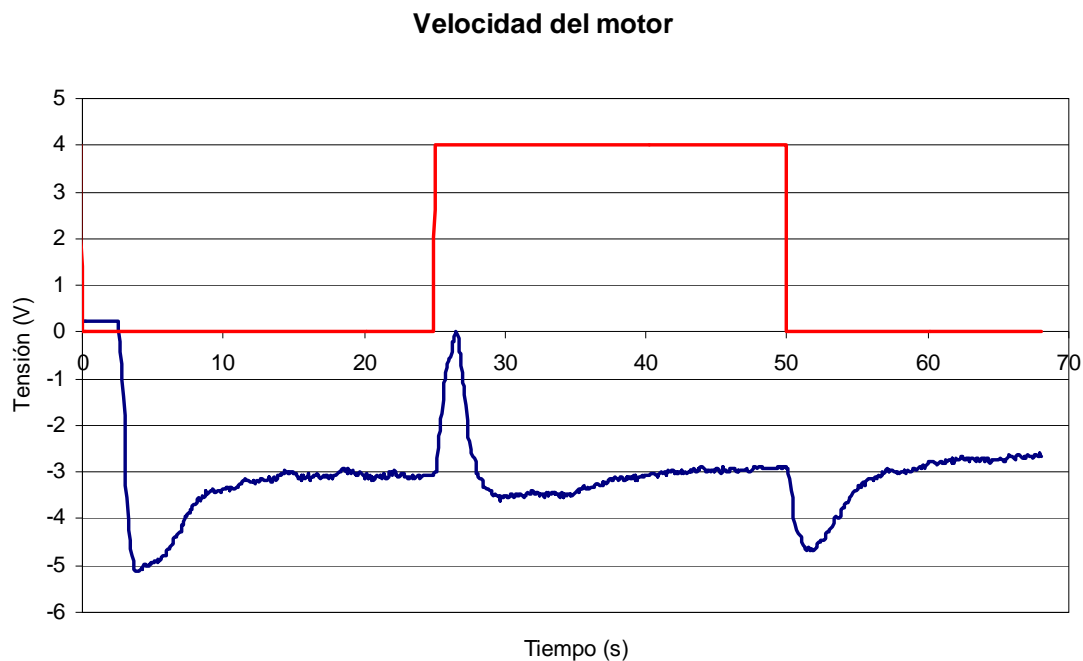


Figura 44: Velocidad del motor

Posteriormente actúa el freno haciendo que la velocidad del motor disminuya considerablemente hasta casi pararse, entonces el regulador hace que se aumente la velocidad del motor hasta llegar a estabilizarse en el mismo valor de -3 V. Se comprueba que el regulador alcanza aproximadamente la misma velocidad independientemente de la carga que actúe. Existe un pequeño error que puede ser debido a alguno de los muchos factores no lineales que existen en el sistema.

La segunda perturbación consiste en quitar la carga que se había añadido, la velocidad del motor aumenta bruscamente y luego tiende a la velocidad del estado estacionario. A la hora de retirar la carga se aprecia una respuesta más lenta en comparación con la perturbación producida al frenar el motor, esto se debe a lo

explicado en el apartado 4.3.3 dónde veíamos como en la Figura 29 la respuesta del regulador en el flanco de bajada es más lenta debido a las propias características no lineales de su construcción.

La Figura 45 representa la velocidad de giro del regulador de Watt en revoluciones por minuto con respecto al tiempo.

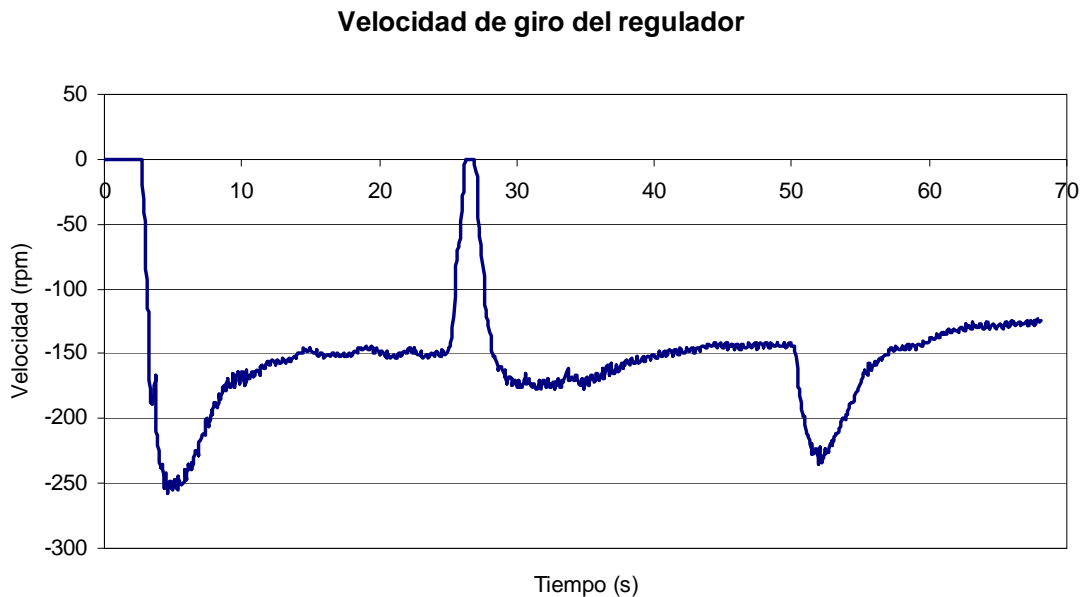


Figura 45: Velocidad de giro del regulador

Comparando ésta gráfica y la anterior, se aprecia que son muy similares puesto que la velocidad del motor se traduce en una velocidad proporcional del regulador centrífugo. El razonamiento de la curva obtenida es el mismo, siendo la velocidad a la que tiende a girar el péndulo de aproximadamente 150 rpm.

Esta velocidad es obtenida a través del sensor de posición localizado en una de las ruedas de inercia, tomando por cada iteración 100 muestras y realizando un ajuste por mínimos cuadrados.

La siguiente figura muestra la posición en milímetros dada por el sensor de desplazamiento, respecto del tiempo.

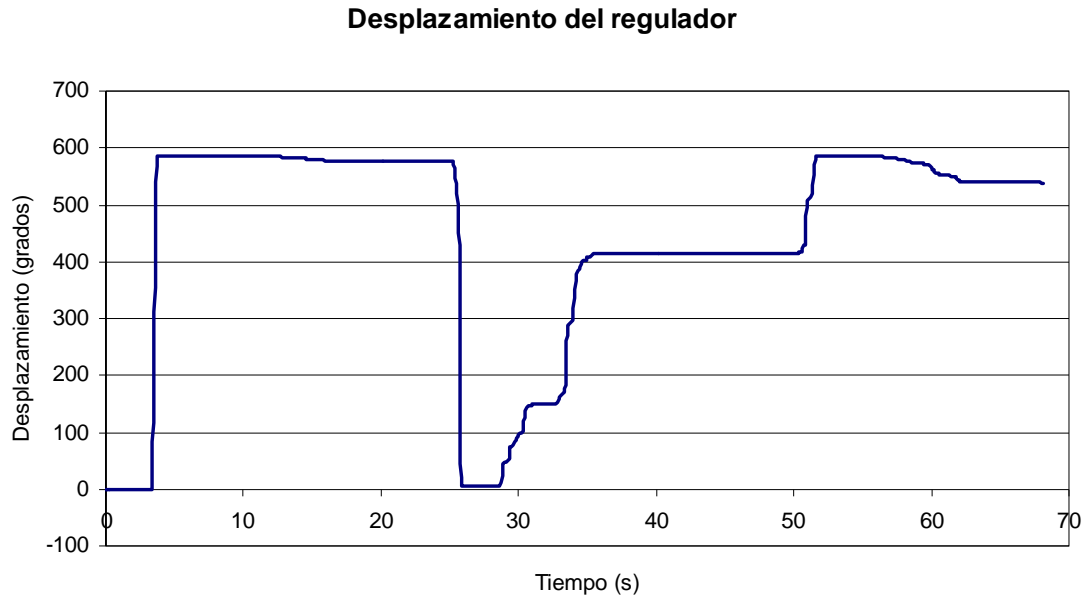


Figura 46: Desplazamiento del regulador

El desplazamiento parte de cero, el regulador no se mueve y las masas están abajo. Cuando el regulador empieza a girar a velocidad máxima, pasa en un instante de un extremo al otro, manteniéndose en esa posición hasta que la válvula se cierra y disminuye la velocidad del motor, haciendo así que el regulador gire más despacio y la fuerza centrífuga disminuya. Una vez estabilizada la velocidad, el desplazamiento queda en una posición determinada, 580°.

Cuando se da la perturbación producida por el freno, el regulador también se para y por tanto el eje superior vuelve a su posición inicial, haciendo que se abra la válvula de paso de aire que aumenta la velocidad hasta estabilizarse de nuevo.

Finalmente se retira la carga creando una nueva perturbación, el regulador gira a velocidad máxima por lo que la referencia hará que la válvula se cierre.

La Figura 47 muestra la tensión aplicada (en voltios) al motor eléctrico que gobierna la válvula, mientras que la Figura 48 representa la posición real de la válvula, en voltios, medida desde la salida analógica del bloque de control.

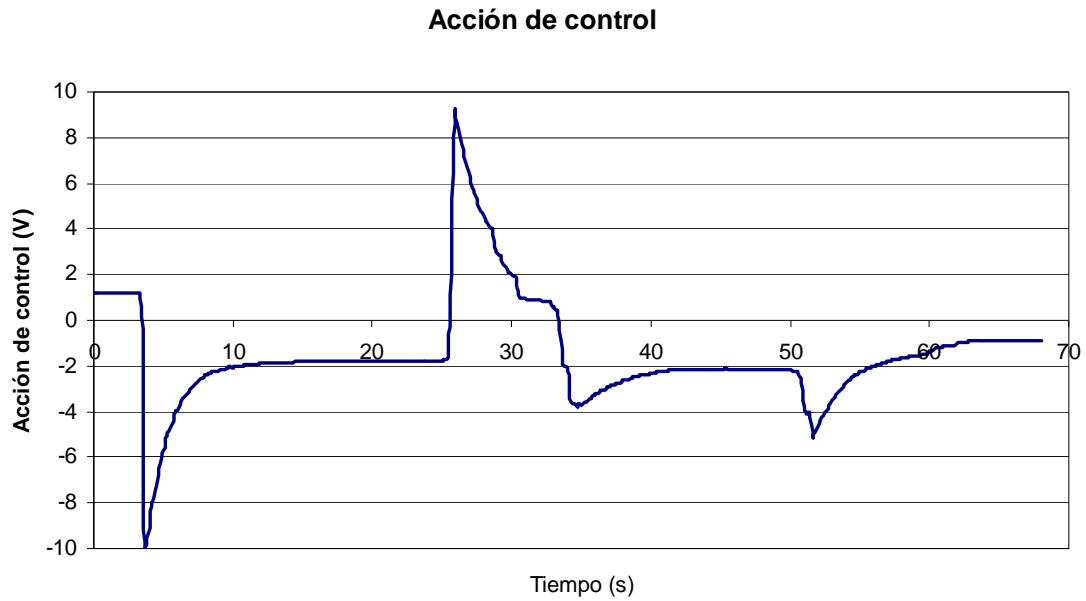


Figura 47: Tensión que alimenta la electroválvula

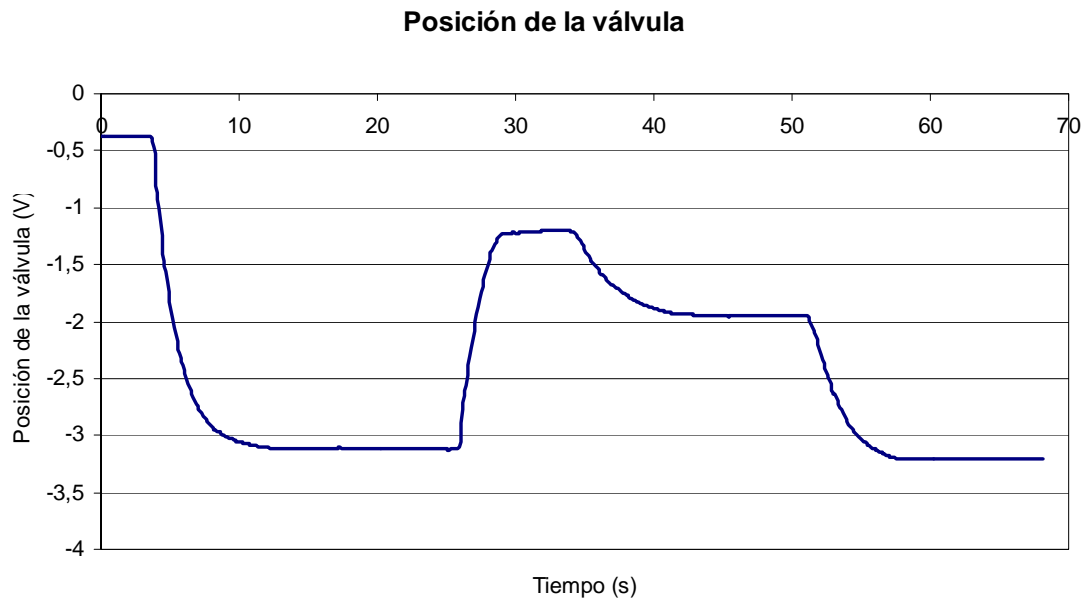


Figura 48: Posición de la válvula

Inicialmente, cuando el motor trabaja a velocidad máxima la realimentación da la orden de cerrar la válvula mediante tensión negativa, como se observa en la Figura 47. La válvula comienza a cerrarse hasta que la velocidad del motor se estabiliza en una posición intermedia de -3,2 V.

Más tarde, actúa el freno haciendo que la velocidad del regulador disminuya y la referencia abra la válvula para volver a las mismas revoluciones por minuto. La posición de la válvula en este estado es de -2 V. En esta etapa se produce una sobreoscilación debido a que el aire del circuito opone una resistencia al cerrar la válvula que no existe al abrirla, y por lo tanto la misma acción de control hace abrir la más la válvula.

Cuando la carga frena al motor, la válvula está más abierta que cuando no había carga, esto se debe a que el regulador controla el motor para una velocidad determinada y si tiene un rozamiento grande que le frena, necesitará mayor caudal de aire para mover los pistones a la misma velocidad.

Por último, alrededor del segundo 50 se retira la carga haciendo que la velocidad aumente y por tanto la válvula se cierre para dejar pasar menos caudal, este estado es similar al que se producía antes de introducir la perturbación.

5.3. CONTROL PROPORCIONAL

El siguiente experimento trata de comprobar si realmente el Regulador de Watt actúa como un controlador proporcional. Una vez obtenidos los resultados del ejercicio realizado en el apartado anterior, se retira el péndulo centrífugo y se coloca un control proporcional en su lugar, con una ganancia ajustada. De esta forma, la medida de la velocidad de los pistones se desconecta del motor LEGO y se lleva a la tarjeta de adquisición directamente. En la Figura 49 se representan las gráficas comparativas correspondientes a los dos experimentos:

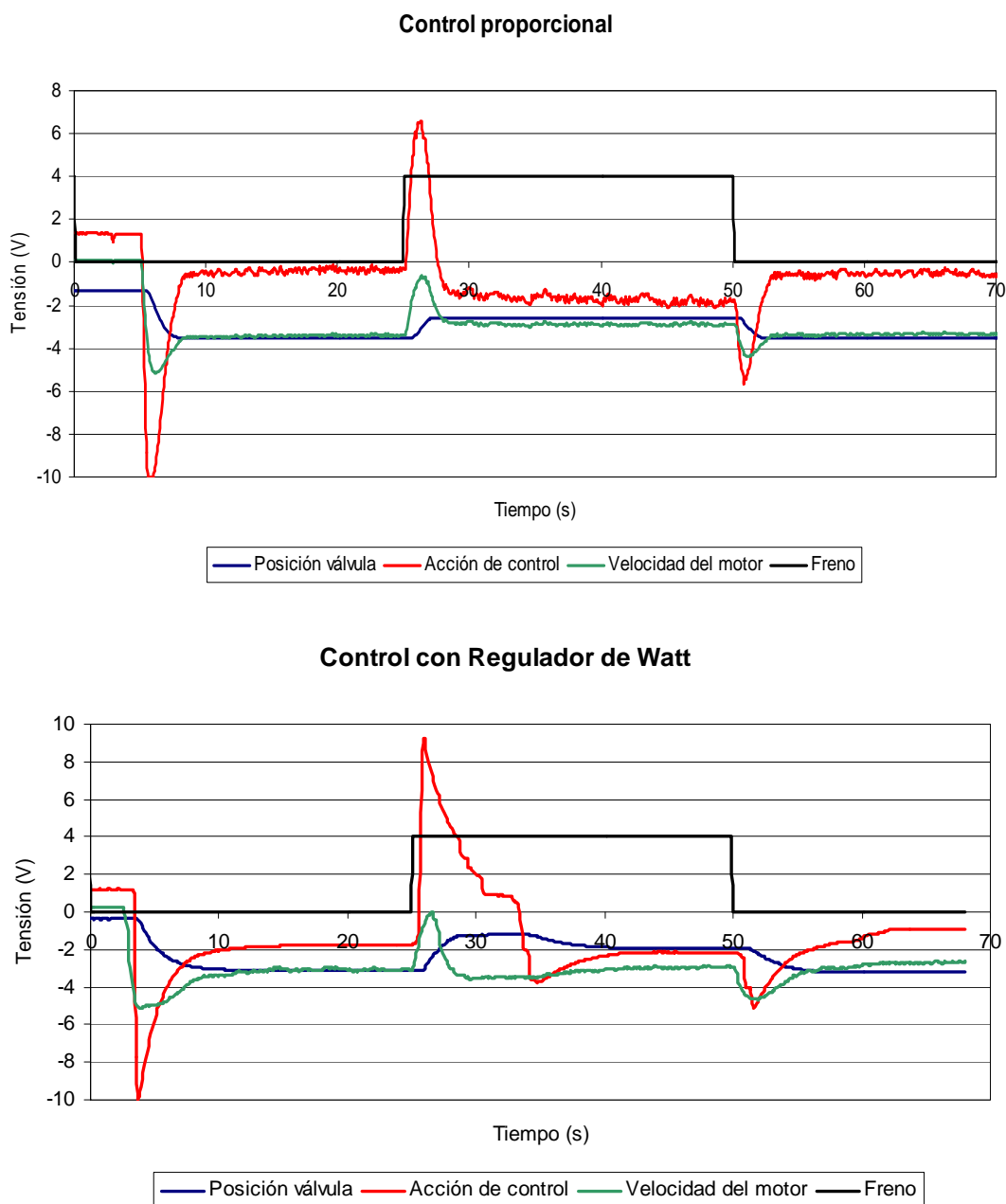


Figura 49: Comparación gráficas

En términos generales las gráficas obtenidas con control proporcional y con el péndulo centrífugo son similares. En ambas se regula la velocidad del motor a unos -3 V, aún con la acción de una carga. Sin embargo hay algunos detalles que son diferentes.

Por un lado, en el Regulador de Watt se produce una sobreoscilación en la acción de control que puede ser debido a que su dinámica sea más lenta, y por tanto tarde más tiempo en corregir el error. En el control proporcional la acción de control es una curva más suave y sin sobreoscilaciones.

Por otro lado, en la Figura 49 se observa el funcionamiento no lineal del Regulador de Watt, en concreto del desplazamiento del eje superior. Se aprecia como la acción de control se realiza en varias etapas, hecho que se produce por el rozamiento no lineal existente y que también influye en las sobreoscilaciones mencionadas anteriormente.

Se puede concluir que una vez ajustada la ganancia, el regulador actúa como un controlador proporcional. Sin embargo, en estudios posteriores que no conciernen a este proyecto, sería conveniente comparar estos resultados con los obtenidos con un Regulador de Watt construido de tal forma que evite o bien reduzca todas las no linealidades existentes en el Regulador construido con LEGOs y en la maqueta motor.

6. CONCLUSIONES

Después de estudiar los antecedentes del Regulador de Watt, analizar las ecuaciones que rigen el sistema, realizar diversas simulaciones del mismo y analizar los resultados obtenidos al acoplar un regulador construido con LEGOs a una maqueta que representa un motor de vapor impulsada con aire comprimido, se pueden extraer diversas conclusiones.

Un aspecto muy a tener en cuenta en este trabajo es el rozamiento. El regulador que Watt utilizaba, funcionaba gracias a la fricción que se producía entre los materiales, ésta hacía que el mecanismo fuera estable. Cuando intentaron mejorar el regulador con nuevos materiales, con mejor acabado superficial y por tanto menos rozamiento, el regulador oscilaba mucho y a veces incluso se volvía inestable.

En este proyecto se han obtenido ecuaciones del regulador que corroboran lo que sucedía, un coeficiente de rozamiento menor supone una disminución del amortiguamiento y por esta razón los nuevos reguladores que construían oscilaban más.

Hubo algunos científicos e ingenieros de la época que intentaron solucionar el problema de la oscilación añadiendo masas más grandes al regulador. Teóricamente se ha demostrado que al aumentar la masa de los contrapesos el amortiguamiento disminuye y el sistema oscila menos.

La maqueta construida mediante piezas LEGOs tiene mucho rozamiento en sus conexiones y aún lubricando las zonas problemáticas el comportamiento no es el deseado. Sin embargo, esto que parece una desventaja es lo que ha hecho que el mecanismo funcione sin oscilaciones, obteniéndose directamente el estado estacionario.

Además el estudio realizado con Matlab, mediante el cual se realizan distintas simulaciones, nos permite concluir que a mayor coeficiente de rozamiento menor es el tiempo de estabilización. En cuanto a los dos tipos de rozamientos considerados, se puede afirmar que tienen una influencia similar en el sistema. Cabe decir que en ninguna de estas simulaciones se tuvo en cuenta el rozamiento no lineal que se produce

en el regulador, hecho que influye en su comportamiento, pero que no hay forma de cuantificar.

Es difícil extraer conclusiones generales en este aspecto puesto que en el tiempo de estabilización influyen las masas, las longitudes, el ángulo inicial y la velocidad angular.

Algunos de los fallos o inconvenientes que encontraban antiguamente en el regulador de Watt era que el péndulo suministraba una acción de tipo proporcional y el control de velocidad sólo era exacto con una determinada carga. Además, solo podían operar en un rango reducido de velocidades y tenía un offset. Los hermanos Siemens llegaron a decir que no era un regulador, sino un moderador de la velocidad.

El regulador construido en el laboratorio posee un control proporcional, sin embargo actúa correctamente frente a perturbaciones y cambios de carga. Es cierto que el regulador está adaptado para un rango determinado de velocidad, que en este caso se conoce puesto que se sabe el margen en el que trabaja la maqueta motor. Si no se supiera o si este variara sería muy complicado regular su velocidad.

Los hermanos Siemens eliminaban el offset presente en el regulador mediante un mecanismo de engranajes que comparaba la velocidad de referencia con la del motor. De esta forma introducían acción integral porque lo hacían en términos de distancia y no de velocidad.

En este caso es mucho más fácil, puesto que directamente se introduce un control integral con las herramientas de Labview, sin tener que fabricar un sistema mecánico que lo realice por sí mismo.

Es preciso tener en cuenta que el regulador construido está realizado con piezas LEGOs, por lo que se considera poco preciso y fiable. La parte que peor funciona es el desplazamiento del eje superior, con un comportamiento no lineal que produce saltos bruscos.

Además de los inconvenientes que se producen en el regulador de Watt, hay ciertos aspectos del motor que influyen en el sistema haciendo difícil la labor de análisis:

- El compresor produce un caudal de aire en ocasiones no uniforme.
- Aún con el máximo caudal de aire, el motor a veces no arranca, se queda encasquillado, esto depende de la posición en la que haya quedado parado en el experimento anterior.
- La válvula motorizada tiene una zona muerta muy grande cuando está en funcionamiento, hay un rango no lineal y difícil de definir, para el cual la válvula no se mueve.

De los experimentos realizados al final del proyecto, se puede concluir que tal y como se ha acoplado el sistema, la velocidad a la que tiende a regular es de aproximadamente 800 rpm. Siendo ésta variable según aspectos como los rangos de tensión de acoplamiento, la longitud de los brazos y/o las masas del regulador.

Hay ciertos aspectos del sistema que no han sido estudiados en profundidad debido a que no eran el objetivo de este proyecto, pero que sería conveniente analizar en trabajos posteriores para extraer nuevas conclusiones. Entre ellos sería muy útil construir un nuevo regulador con menor rozamiento, evitar la fricción no lineal, analizar la planta del motor en detalle y su comportamiento no lineal en la electroválvula.



7. BIBLIOGRAFÍA

- THE LEGO WATT GOVERNOR,
http://www.zfm.ethz.ch/~leine/lego_watt_governor.htm
- CENTRIFUGAL GOVERNOR, http://en.wikipedia.org/wiki/Centrifugal_governor
- EL REGULADOR DE WATT, Mec Fun Net,
<http://mecfunnet.faii.etsii.upm.es/Xitami/webpages/reguwatt.html>
- HISTORIA DE LA INGENIERÍA DE CONTROL, <http://automata.cps.unizar.es/>
- ON GOVERNORS,
<http://seit.unsw.adfa.edu.au/staff/sites/hrp/historicalpapers/ongovernors.pdf>
- MATHWORKS, <http://www.mathworks.com/help/>
- CE7 ENGINE SPEED CONTROL APPARATUS, P. E. Wellstead, The Control Systems Centre, UMIST.
- A HISTORY OF CONTROL ENGINEERING 1800 – 1930, S. Bennett.

ANEXO 1: OBTENCIÓN DE LAS ECUACIONES

En el presente anexo se analizan las ecuaciones que rigen el regulador de Watt. Partimos de un modelo simplificado que se aproxime al utilizado por Watt, como el de la Figura 1.

Se consideran dos brazos de longitud l_1 unidos al eje por la articulación superior (a_1) y dos brazos de longitud l_2 articulados en el pasador (p) de masa m_2 . En los puntos que unen ambos brazos se sostienen dos masas, m_1 .

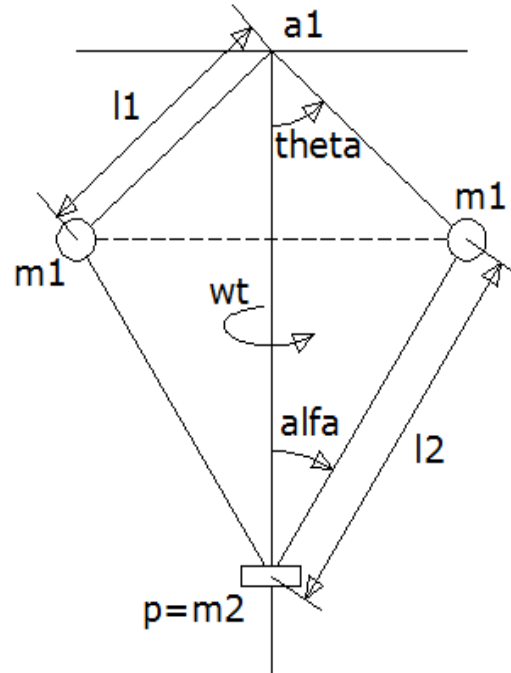


Figura 1: Modelo simplificado

En la estructura se observa un eje vertical, respecto al cual el regulador girará con una velocidad angular w . El ángulo que forma dicho eje con el brazo l_1 se denomina θ (theta en la figura), mientras que el formado con el brazo l_2 es α (alfa en la figura). En resumen, se podría considerar al regulador como un convertidor no lineal del movimiento de rotación en traslación.

Para obtener las ecuaciones del modelo se ha elegido el método de Lagrange frente a otros métodos alternativos debido a la sencillez de su planteamiento y posterior desarrollo. Una vez conocida la energía cinética y la potencial, se calcula el Lagrangiano, que posteriormente habrá que derivar.

$$L = E_{cin} - E_p \quad \text{Ec. (I.1)}$$

$$E_{cin} = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot m_1 \left[l_1^2 \cdot \dot{\theta}^2 + l_1^2 \cdot w^2 (\sin \theta)^2 \right] + \frac{1}{2} \cdot m_2 \left(l_1 \cdot \dot{\theta} \cdot \sin \theta \right)^2 \left(1 + \frac{l_1 \cos \theta}{l_2 \cos \alpha} \right)^2 \quad \text{Ec. (I.2)}$$

$$E_p = -m_1 \cdot g \cdot h = -2 \cdot m_1 \cdot g \cdot l_1 \cdot \cos \theta - m_2 \cdot g (l_1 \cdot \cos \theta + l_2 \cdot \cos \alpha) \quad \text{Ec. (I.3)}$$

$$L = m_1 \cdot l_1^2 [\dot{\theta}^2 + w^2 (\sin \theta)^2] + \frac{1}{2} \cdot m_2 (l_1 \cdot \dot{\theta} \cdot \sin \theta)^2 \left(1 + \frac{l_1 \cos \theta}{l_2 \cos \alpha} \right)^2 + \quad \text{Ec. (I.4)}$$

$$+ 2 \cdot m_1 \cdot g \cdot l_1 \cdot \cos \theta + m_2 \cdot g (l_1 \cdot \cos \theta + l_2 \cdot \cos \alpha) \quad \text{Ec. (I.5)}$$

Dando con la forma de poner α en función de θ , se podrá eliminar el término $\cos \alpha$.

$$R = l_1 \cdot \sin \theta = l_2 \cdot \sin \alpha \quad \text{Ec. (I.6)}$$

$$\sin \alpha = \frac{l_1}{l_2} \sin \theta \quad \text{Ec. (I.7)}$$

Sabiendo que:

$$(\cos \alpha)^2 + (\sin \alpha)^2 = 1 \quad \text{Ec. (I.8)}$$

$$(\cos \alpha)^2 = 1 - (\sin \alpha)^2 = 1 - \frac{l_1^2}{l_2^2} (\sin \theta)^2 \quad \text{Ec. (I.9)}$$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{l_1^2}{l_2^2} (\sin \theta)^2} \quad \text{Ec. (I.10)}$$

Y ahora sustituyendo:

$$L = m_1 \cdot l_1^2 [\dot{\theta}^2 + w^2 (\sin \theta)^2] + \frac{1}{2} \cdot m_2 (l_1 \cdot \dot{\theta} \cdot \sin \theta)^2 \left(1 + \frac{l_1 \cos \theta}{l_2 \sqrt{1 - \frac{l_1^2}{l_2^2} (\sin \theta)^2}} \right)^2 + \quad \text{Ec. (I.11)}$$
$$+ 2 \cdot m_1 \cdot g \cdot l_1 \cdot \cos \theta + m_2 \cdot g \left(l_1 \cdot \cos \theta + l_2 \sqrt{1 - \frac{l_1^2}{l_2^2} (\sin \theta)^2} \right)$$

Según Lagrange:

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) \quad \text{Ec. (I.12)}$$

Debido a la elevada dificultad que supone derivar la Ec. (I.11) para obtener el Lagrangiano, se simplifica imponiendo la condición de que las longitudes de los brazos sean iguales, hecho que se produce en la mayor parte de los reguladores.

$$l_1 = l_2 = l \quad \text{Ec. (I.13)}$$

De forma que se reduce a la siguiente ecuación:

$$L = m_1 \cdot l^2 \left[\dot{\theta}^2 + w^2 (\sin \theta)^2 \right] + 2 \cdot m_2 (l \cdot \dot{\theta} \cdot \sin \theta)^2 + 2 \cdot m_1 \cdot g \cdot l \cdot \cos \theta + 2 \cdot m_2 \cdot g \cdot l \cdot \cos \theta \quad \text{Ec. (I.14)}$$

Aplicando Lagrange:

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = 2 \cdot m_1 \cdot l^2 \cdot w^2 \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta + 4 \cdot m_2 \cdot l^2 \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta + 2 \cdot m_1 \cdot g \cdot l \cdot \sin \theta + 2 \cdot m_2 \cdot g \cdot l \cdot \sin \theta \quad \text{Ec. (I.15)}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = 2 \cdot m_1 \cdot l^2 \cdot \dot{\theta} + 4 \cdot m_2 \cdot l^2 \cdot \dot{\theta} \cdot (\sin \theta)^2 \quad \text{Ec. (I.16)}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = 2 \cdot m_1 \cdot l^2 \cdot \ddot{\theta} + 4 \cdot m_2 \cdot l^2 \cdot \ddot{\theta} \cdot (\sin \theta)^2 + 8 \cdot m_2 \cdot l^2 \cdot (\dot{\theta})^2 \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta \quad \text{Ec. (I.17)}$$

La ecuación que resulta de sustituir todos sus términos es:

$$2 \cdot l^2 \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta (m_1 \cdot w^2 - 2 \cdot m_2 \cdot \dot{\theta}^2) - 2 \cdot m_1 \cdot g \cdot l \cdot \sin \theta + 2 \cdot m_2 \cdot g \cdot l \cdot \sin \theta = 2 \cdot \ddot{\theta} \cdot l^2 (m_1 + 2 \cdot m_2 (\sin \theta)^2) \quad \text{Ec. (I.18)}$$

Despejando, se obtiene el modelo sin rozamiento dónde la aceleración angular viene dada por la siguiente ecuación:

$$\ddot{\theta} = \frac{\sin \theta \left[\cos \theta (m_1 \cdot w^2 - 2 \cdot m_2 \dot{\theta}^2) - \frac{g}{l} (m_1 + m_2) \right]}{m_1 + 2 \cdot m_2 (\sin \theta)^2} \quad \text{Ec. (I.19)}$$

Dónde: - θ es el ángulo que forma el brazo del regulador con el eje central.

- $\ddot{\theta}$ representa la aceleración angular.
- m_1 es la masa de una de las bolas.
- m_2 es la masa del pasador.
- w representa la velocidad de giro del regulador.
- g es la aceleración de la gravedad.
- l es la longitud de los brazos.

Se puede ver en la Ec. (I.19) que la aceleración angular depende de forma no lineal con la velocidad de giro del regulador.

Por otro lado, suponiendo que la masa del pasador (m_2) se puede despreciar frente a las masas de las bolas (m_1), la ecuación se simplifica aún más, quedando de la siguiente forma:

$$\ddot{\theta} = \frac{\sin \theta \left[\cos \theta \cdot m_1 \cdot w^2 - \frac{g}{l} m_1 \right]}{m_1} = \sin \theta \left(\cos \theta \cdot w^2 - \frac{g}{l} \right) \quad \text{Ec. (I.20)}$$

Como se puede apreciar en la Ec. (I.20), el hecho de que las longitudes de los brazos sean iguales o no, no afecta en esta segunda suposición, ya que al imponer que m_2 sea nula, se elimina el término donde aparece la relación entre las longitudes.

Se sabe por la bibliografía¹ la importancia del rozamiento en el Regulador de Watt y por tanto se incluye en la ecuación el rozamiento lineal que se produce en las articulaciones, fijando como variable angular del sistema el ángulo theta, véase Figura 1. Desconocemos, sin embargo, el punto de rozamiento principal (si es que lo hay) y se han considerado dos puntos: la articulación a_1 y el pasador, p , obteniéndose así dos modelos con rozamientos distintos.

Como es lógico existirá rozamiento en ambos puntos, pero de cara al análisis resultará más útil hacerlo por separado y así poder comparar los resultados sobre la influencia de cada uno de ellos.

Considerando primero el rozamiento en la articulación a_1 , se agrega a la ecuación un término lineal dependiente de la velocidad angular $\dot{\theta}$ que reste energía al sistema. La ecuación obtenida con la incorporación del rozamiento propuesto es:

$$\begin{aligned} 2 \cdot l^2 \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta (m_1 \cdot w^2 - 2 \cdot m_2 \dot{\theta}^2) - 2 \cdot m_1 \cdot g \cdot l \cdot \sin \theta - 2 \cdot m_2 \cdot g \cdot l \cdot \sin \theta - C_A \cdot \dot{\theta} &= \\ = 2 \cdot \ddot{\theta} \cdot l^2 (m_1 + 2 \cdot m_2 (\sin \theta)^2) & \quad \text{Ec. (I.21)} \end{aligned}$$

¹ A HISTORY OF CONTROL ENGINEERING 1800 – 1930, S. Bennett.

$$\ddot{\theta} = \frac{\sin \theta \left[\cos \theta (m_1 \cdot w^2 - 2 \cdot m_2 \cdot \dot{\theta}^2) - \frac{g}{l} (m_1 + m_2) \right] - \frac{C_A}{2 \cdot l^2} \dot{\theta}}{m_1 + 2 \cdot m_2 (\sin \theta)^2} \quad \text{Ec. (I.22)}$$

Dónde C_A (N·m·s) es el coeficiente de rozamiento lineal (o viscoso) en la articulación a_l y $\dot{\theta}$ representa la velocidad angular.

Considerando ahora que el rozamiento principal se localiza en la superficie de contacto entre el pasador y el eje principal respecto del que gira el sistema (ver Figura 1), nótese que el coeficiente de rozamiento será distinto al anterior, el término que se añade a la ecuación es proporcional a la derivada de la posición $2 \cdot l \cdot \dot{\theta} \cdot \sin \theta$ y la ecuación queda:

$$\ddot{\theta} = \frac{\sin \theta \left[\cos \theta (m_1 \cdot w^2 - 2 \cdot m_2 \cdot \dot{\theta}^2) - \frac{g}{l} (m_1 + m_2) \right] - \frac{C_P}{2 \cdot l^2} 2 \cdot l \cdot \sin \theta \cdot \dot{\theta}}{m_1 + 2 \cdot m_2 (\sin \theta)^2} \quad \text{Ec. (I.23)}$$

$$\ddot{\theta} = \frac{\sin \theta \left[\cos \theta (m_1 \cdot w^2 - 2 \cdot m_2 \cdot \dot{\theta}^2) - \frac{g}{l} (m_1 + m_2) - \frac{C_P}{l} \cdot \dot{\theta} \right]}{m_1 + 2 \cdot m_2 (\sin \theta)^2} \quad \text{Ec. (I.24)}$$

Dónde C_P (N·s) es el coeficiente de rozamiento lineal en el pasador.

La ecuación del sistema que considera ambos rozamientos, teniendo en cuenta que los coeficientes de rozamiento serán distintos para cada caso, es la siguiente:

$$\ddot{\theta} = \frac{\sin \theta \left[\cos \theta (m_1 \cdot w^2 - 2 \cdot m_2 \cdot \dot{\theta}^2) - \frac{g}{l} (m_1 + m_2) \right] - \frac{C_A}{2 \cdot l^2} \dot{\theta} - \frac{C_P}{l} \sin \theta \cdot \dot{\theta}}{m_1 + 2 \cdot m_2 (\sin \theta)^2} \quad \text{Ec. (I.25)}$$

Sabiendo que C_A es el coeficiente para el rozamiento en la articulación y C_P lo es para la fricción que se produce en el pasador.

El análisis de las Ecs. (I.22), (I.24) y (I.25), al ser no lineales resulta complejo, para simplificarlo se utilizará el modelo linealizado mediante las series de Taylor.

La linealización es un procedimiento que permite aproximar un modelo no lineal, por otro que sí lo es y que cumple, por lo tanto, las propiedades de los sistemas lineales, y en particular, el principio de superposición.

Esta aproximación no tiene validez total, sino únicamente en el entorno del punto de funcionamiento elegido, por lo que su aplicación está indicada para aquellos sistemas cuyas señales sufren pequeñas variaciones alrededor de sus valores de equilibrio.

En este modelo se considerarán pequeños desplazamientos respecto de un punto de operación:

$$\delta_w = w - w_s \quad \delta_\theta = \theta - \theta_s \quad \text{Ec. (I.26)}$$

Donde δ_w y δ_θ son las pequeñas desviaciones de la velocidad y de la posición angular respecto del punto de operación w_s y θ_s .

A) Linealización de la ecuación que supone los brazos de igual longitud, considera las tres masas y el rozamiento principal en el pasador.

Partimos de Ec. (I.24):

$$\ddot{\theta} = \frac{\sin \theta \left[\cos \theta (m_1 \cdot w^2 - 2 \cdot m_2 \cdot \dot{\theta}^2) - \frac{g}{l} (m_1 + m_2) - \frac{C_P}{l} \dot{\theta} \right]}{m_1 + 2 \cdot m_2 (\sin \theta)^2}$$

Para linealizar la ecuación se hace un desarrollo en serie, eliminando los términos de segundo orden, que se pueden considerar despreciables:

$$f(\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}, w) = 0 \quad \text{Ec. (I.27)}$$

Colocando los términos de la función de tal forma que resulte equivalente:

$$\begin{aligned} (m_1 + 2 \cdot m_2 (\sin \theta)^2) \cdot \ddot{\theta} + \sin \theta \cdot \frac{C_P}{l} \dot{\theta} + \sin \theta \cdot \cos \theta \cdot 2 \cdot m_2 \cdot \dot{\theta}^2 + \\ - \sin \theta \cdot \cos \theta \cdot m_1 \cdot w^2 + \frac{g}{l} \cdot \sin \theta \cdot (m_1 + m_2) = 0 \end{aligned} \quad \text{Ec. (I.28)}$$

Y haciendo el desarrollo en serie:

$$f(x) = f(x_0) + \left. \frac{\partial f}{\partial \theta} \right|_0 \bar{\theta} + \left. \frac{\partial f}{\partial \dot{\theta}} \right|_0 \dot{\bar{\theta}} + \left. \frac{\partial f}{\partial \ddot{\theta}} \right|_0 \ddot{\bar{\theta}} + \left. \frac{\partial f}{\partial w} \right|_0 \bar{w} \quad \text{Ec. (I.29)}$$

Al ser estado estacionario, $f(x) = f(x_0) = 0$

$$0 = \left. \frac{\partial f}{\partial \theta} \right|_0 \bar{\theta} + \left. \frac{\partial f}{\partial \dot{\theta}} \right|_0 \dot{\bar{\theta}} + \left. \frac{\partial f}{\partial \ddot{\theta}} \right|_0 \ddot{\bar{\theta}} + \left. \frac{\partial f}{\partial w} \right|_0 \bar{w} \quad \text{Ec. (I.30)}$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial f}{\partial \theta} \right|_{\theta_s, w_s} &= \ddot{\theta}_s \cdot 2 \cdot m_2 \cdot 2 \cdot \sin \theta_s \cdot \cos \theta_s + \dot{\theta}_s \frac{C_P \cdot \cos \theta_s}{l} + 2 \cdot m_2 \cdot \dot{\theta}_s^2 \cdot ((\cos \theta_s)^2 - (\sin \theta_s)^2) + \\ &- m_2 \cdot w_s^2 ((\cos \theta_s)^2 - (\sin \theta_s)^2) + \frac{g}{l} \cos(\theta_s) (m_1 + m_2) \end{aligned} \quad \text{Ec. (I.31)}$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial \dot{\theta}} \right|_{\theta_s, w_s} = \sin \theta_s \cdot \frac{C_P}{l} + \sin \theta_s \cdot \cos \theta_s \cdot 4 \cdot m_2 \cdot \dot{\theta}_s \quad \text{Ec. (I.32)}$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial \ddot{\theta}} \right|_{\theta_s, w_s} = m_1 + 2 \cdot m_2 (\sin \theta_s)^2 \quad \text{Ec. (I.33)}$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial w} \right|_{\theta_s, w_s} = -\sin \theta_s \cdot \cos \theta_s \cdot 2 \cdot m_1 \cdot w_s \quad \text{Ec. (I.34)}$$

En estado estacionario se cumple que $\dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0$, por lo que las ecuaciones anteriores se reducen a la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial f}{\partial \theta} \right|_{\theta_s, w_s} &= -m_1 \cdot w_s^2 ((\cos \theta_s)^2 - (\sin \theta_s)^2) + \frac{g}{l} \cos(\theta_s) (m_1 + m_2) = \\ &= -m_1 \cdot w_s^2 \cdot \cos(2 \cdot \theta_s) + \frac{g}{l} \cos(\theta_s) (m_1 + m_2) \end{aligned} \quad \text{Ec. (I.35)}$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial \dot{\theta}} \right|_{\theta_s, w_s} = \sin \theta_s \cdot \frac{C_P}{l} \quad \text{Ec. (I.36)}$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial \ddot{\theta}} \right|_{\theta_s, w_s} = m_1 + 2 \cdot m_2 (\sin \theta_s)^2 \quad \text{Ec. (I.37)}$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial w} \right|_{\theta_s, w_s} = -\sin \theta_s \cdot \cos \theta_s \cdot 2 \cdot m_1 \cdot w_s \quad \text{Ec. (I.38)}$$

Una vez analizados todos los términos, se sustituye en la ecuación y se despeja la velocidad de rotación:

$$\delta_\omega = \left[\left(m_1 + 2 \cdot m_2 (\sin \theta_s)^2 \right) \cdot \ddot{\delta}_\theta + \left(\sin \theta_s \cdot \frac{C_P}{l} \right) \cdot \dot{\delta}_\theta + \left(-m_1 \cdot w_s^2 \cdot \cos(2 \cdot \theta_s) + \frac{g}{l} \cos(\theta_s) (m_1 + m_2) \right) \cdot \delta_\theta \right] \cdot \frac{1}{\sin \theta_s \cdot \cos \theta_s \cdot 2 \cdot m_1 \cdot w_s} \quad \text{Ec. (I.39)}$$

Aplicando la transformada de Laplace se obtiene la función de transferencia

$$\delta_\omega(s) = \left[\left(m_1 + 2 \cdot m_2 (\sin \theta_s)^2 \right) \cdot s^2 \cdot \delta_\theta(s) + \left(\sin \theta_s \cdot \frac{C_P}{l} \right) \cdot s \cdot \delta_\theta(s) + \left(-m_1 \cdot w_s^2 \cdot \cos(2 \cdot \theta_s) + \frac{g}{l} \cos(\theta_s) (m_1 + m_2) \right) \cdot \delta_\theta(s) \right] \cdot \frac{1}{\sin \theta_s \cdot \cos \theta_s \cdot 2 \cdot m_1 \cdot w_s} \quad \text{Ec. (I.40)}$$

$$\frac{\delta_\theta(s)}{\delta_\omega(s)} = \frac{\sin \theta_s \cdot \cos \theta_s \cdot 2 \cdot m_1 \cdot w_s}{\left(m_1 + 2 \cdot m_2 (\sin \theta_s)^2 \right) \cdot s^2 + \left(\sin \theta_s \cdot \frac{C_P}{l} \right) \cdot s - m_1 \cdot w_s^2 \cdot \cos(2 \cdot \theta_s) + \frac{g}{l} \cos(\theta_s) (m_1 + m_2)} \quad \text{Ec. (I.41)}$$

Expresión que se reduce al introducir la relación entre θ_s y w_s en estado estacionario:

$$\frac{\delta_\theta(s)}{\delta_\omega(s)} = \frac{\sin(2\theta_s) \cdot m_1 \cdot w_s}{\left(m_1 + 2 \cdot m_2 (\sin \theta_s)^2 \right) \cdot s^2 + \left(\sin \theta_s \cdot \frac{C_P}{l} \right) \cdot s + m_1 \cdot w_s^2 \cdot (\sin \theta_s)^2} \quad \text{Ec. (I.42)}$$

B) Linealización para el caso en el que se consideran los brazos de igual longitud, las tres masas y el rozamiento en la articulación a_1 .

Partimos de la Ec. (I.22):

$$\ddot{\theta} = \frac{\sin \theta \left[\cos \theta (m_1 \cdot w^2 - 2 \cdot m_2 \cdot \dot{\theta}^2) - \frac{g}{l} (m_1 + m_2) \right] - \frac{C_A}{2 \cdot l^2} \dot{\theta}}{m_1 + 2 \cdot m_2 (\sin \theta)^2}$$

Para linealizar la ecuación se hace un desarrollo en serie, eliminando los términos de segundo orden, que podemos considerar despreciables:

$$f(\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}, w) = 0 \quad \text{Ec. (I.43)}$$

Colocando los términos de la función de tal forma que resulte equivalente:

$$\begin{aligned} (m_1 + 2 \cdot m_2 (\sin \theta)^2) \cdot \ddot{\theta} + \frac{C_A}{2 \cdot l^2} \dot{\theta} + \sin \theta \cdot \cos \theta \cdot 2 \cdot m_2 \cdot \dot{\theta}^2 + \\ - \sin \theta \cdot \cos \theta \cdot m_1 \cdot w^2 + \frac{g}{l} \cdot \sin \theta \cdot (m_1 + m_2) = 0 \end{aligned} \quad \text{Ec. (I.44)}$$

Y haciendo el desarrollo en serie, en estado estacionario:

$$0 = \left. \frac{\partial f}{\partial \theta} \right|_0 \bar{\theta} + \left. \frac{\partial f}{\partial \dot{\theta}} \right|_0 \bar{\dot{\theta}} + \left. \frac{\partial f}{\partial \ddot{\theta}} \right|_0 \bar{\ddot{\theta}} + \left. \frac{\partial f}{\partial w} \right|_0 \bar{w} \quad \text{Ec. (I.45)}$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial \theta} \right|_{\theta_s, w_s} = -m_1 \cdot w_s^2 \cdot \cos(2 \cdot \theta_s) + \frac{g}{l} \cos(\theta_s) (m_1 + m_2) \quad \text{Ec. (I.46)}$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial \dot{\theta}} \right|_{\theta_s, w_s} = \frac{C_A}{2 \cdot l^2} \quad \text{Ec. (I.47)}$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial \ddot{\theta}} \right|_{\theta_s, w_s} = m_1 + 2 \cdot m_2 (\sin \theta_s)^2 \quad \text{Ec. (I.48)}$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial w} \right|_{\theta_s, w_s} = -\sin \theta_s \cdot \cos \theta_s \cdot 2 \cdot m_1 \cdot w_s \quad \text{Ec. (I.49)}$$

Una vez analizados todos los términos, sustituimos en la ecuación y despejamos la velocidad de rotación:

$$\delta_{\omega} = \left[\left(m_1 + 2 \cdot m_2 (\sin \theta_s)^2 \right) \cdot \ddot{\delta}_{\theta} + \left(\frac{C_A}{2 \cdot l^2} \right) \cdot \dot{\delta}_{\theta} + \left(-m_1 \cdot w_s^2 \cdot \cos(2 \cdot \theta_s) + \frac{g}{l} \cos(\theta_s) (m_1 + m_2) \right) \cdot \delta_{\theta} \right] \cdot \frac{1}{\sin \theta_s \cdot \cos \theta_s \cdot 2 \cdot m_1 \cdot w_s} \quad \text{Ec. (I.50)}$$

Aplicando la transformada de Laplace se obtiene la función de transferencia

$$\frac{\delta_{\theta}(s)}{\delta_{\omega}(s)} = \frac{\sin(2\theta_s) \cdot m_1 \cdot w_s}{\left(m_1 + 2 \cdot m_2 (\sin \theta_s)^2 \right) \cdot s^2 + \left(\frac{C_A}{2 \cdot l^2} \right) \cdot s + m_1 \cdot w_s^2 \cdot (\sin \theta_s)^2} \quad \text{Ec. (I.51)}$$

C) En el caso en el que se quisieran analizar ambos rozamientos simultáneamente, la función de transferencia sería la siguiente:

$$\frac{\delta_{\theta}(s)}{\delta_{\omega}(s)} = \frac{\sin(2\theta_s) \cdot m_1 \cdot w_s}{\left(m_1 + 2 \cdot m_2 (\sin \theta_s)^2 \right) \cdot s^2 + \left(\frac{C_A}{2 \cdot l^2} + \sin \theta_s \cdot \frac{C_P}{l} \right) \cdot s + m_1 \cdot w_s^2 \cdot (\sin \theta_s)^2} \quad \text{Ec. (I.52)}$$

Sabiendo que C_A es el coeficiente para el rozamiento en la articulación y C_P lo es para la fricción que se produce en el pasador.

ANEXO 2: MANUAL DE USUARIO Y PROGRAMADOR

Se ha realizado un programa en Matlab con el objetivo de realizar simulaciones con distintos datos y obtener una serie de resultados representados en pantalla. Consta de tres archivos, como usuario solo hace falta escribir en Matlab “watt(escalon)” siendo escalon, la velocidad angular que se quiera introducir en rad/s. Y si se desea modificar el intervalo de ángulos iniciales o coeficientes de rozamiento, se puede hacer en el primer archivo: “watt.m”, al principio de su respectivo bucle for.

A nivel de programación, lo que se hace es crear dos bucles que realicen un doble barrido de distintos datos (rozamiento y ángulo inicial), llamando en cada caso al segundo programa: “tiempo_estabilizacion.m”, que define las constantes necesarias, tanto para el caso lineal como para el no lineal y realiza la simulación en Simulink, tomando los datos obtenidos y calculando el ángulo estacionario. El tiempo de estabilización se define como el tiempo que tarda el sistema en encontrarse entre el $\pm 1\%$ del valor final, una vez encontrado dicho valor, se almacena en una matriz en el archivo “watt.m” y se procede a realizar lo mismo con el siguiente valor del bucle.

Como resultado, queda una matriz de tiempos de estabilización, ángulos iniciales y coeficientes de rozamiento, cuyos datos son representados en dos figuras: Variación del tiempo de estabilización frente al rozamiento y variación del tiempo de estabilización frente al ángulo inicial.

El programa que realiza dicha tarea está compuesto por tres archivos, que son los siguientes:

watt.m

```
function[c,t,x,y]=watt(escalon)

i=1;
for thetai=5:10:85
    thetai=(thetai*pi)/180;
    assignin('base','thetai',thetai);
    j=1;
    for croz=0.001:0.002:0.015
        [y,ts,stop]=tiempo_estabilizacion(escalon,croz,thetai);
        while ts >= stop
            disp('Con el tiempo de simulación actual no se
estabiliza')
            stop_nuevo=input('Indique el nuevo valor de StopTime
(mayor que ts):');
            hAcs = getActiveConfigSet(gcs);
            hAcs.set_param('StopTime', 'stop_nuevo')
            assignin('base','stop_nuevo',stop_nuevo);
            [y,ts,stop]=tiempo_estabilizacion(escalon,croz,thetai);
            stop=stop_nuevo;
        end
        ts_save(i,j)=ts;
        croz_save(j)=croz;
        j=j+1;
    end
    thetainicial=(thetai*180)/pi;
    thetai_save(i)=thetai;
    i=i+1;
end

thetai_save
ts_save
croz_save

figure(2)
plot(croz_save,ts_save);
legend([num2str(thetai_save) repmat('grados',length(thetai_save),1)])
title('VARIACIÓN DE TS FRENTE A ROZAMIENTO')
xlabel('Coeficiente de rozamiento')
ylabel('Tiempo de estabilización (seg)')

figure(3)
plot(thetai_save,ts_save);
legend([repmat('Rozamiento= ',length(croz_save),1)
num2str(croz_save)])
title('VARIACIÓN DE TS FRENTE AL ÁNGULO INICIAL')
xlabel('Thetai (grados)')
ylabel('Tiempo de estabilización (seg)')

hAcs = getActiveConfigSet(gcs);
hAcs.set_param('StopTime', '50');

end
```

tiempo_estabilizacion.m

```
function[y,ts,stop] = tiempo_estabilizacion(escalon,croz,thetai)

[g,l,m1,m2]=constantes_general(croz);

assignin('base','thetai',thetai);
assignin('base','escalon',escalon)

[t,x,y]=sim('watts_nolineal_general');
yfinal=acos((g/l)*(m1+m2)/(m1*escalon^2));
y1=yfinal*1.01;
y2=yfinal*0.99;

for i=1:length(y)
    if (y(i)>=y1) | (y(i)<=y2)
        ts=t(i);
    elseif i==1
        ts=0; % está estabilizado desde el principio
    end
end
hAcs = getActiveConfigSet(bdroot);
stop = hAcs.get_param('StopTime');
stop=str2double(stop);
end
```

constantes_general.m

```
function[g,l,m1,m2]=constantes_general(croz)

%croz es el coeficiente de rozamiento en la articulación o pasador
g=9.8;
l=0.1; %longitud de los brazos en metros
m1=0.1; %masa de las bolas en kg
m2=0.02*m1; %masa del pasador proporcional a la masa de las bolas

thetas=45*pi/180; % theta que hay que ajustar al punto de trabajo
                % thetas influye solo en los modelos linealizados
ws1=sqrt(g/(l*cos(thetas))); %ecuación simple estacionario
ws2=sqrt((g*(m1+m2))/(l*m1*cos(thetas)));%ec. general estacionario

c1=2*ws1*sin(thetas)*cos(thetas); %cte de la ecuación simple lineal
c2=ws1^2*cos(2*thetas)-(g/l)*cos(thetas); %cte de la ec. simple lineal
c3=2*m1*ws2*sin(thetas)*cos(thetas); %cte de la ec. general lineal
c4=m1+2*m2*(sin(thetas))^2; %cte de la ecuación general lineal
c5=(sin(thetas)*croz)/l; %cte de la ecuación general lineal
c6=m1*ws2^2*(sin(thetas)^2); %cte de la ecuación general lineal
c=[c1,c2,c3,c4,c5,c6];

assignin('base','c',c); %exporta c al workspace para q simulink lo lea
assignin('base','ws1',ws1);
assignin('base','thetas',thetas);
assignin('base','ws2',ws2);
assignin('base','croz',croz);
assignin('base','m1',m1);
assignin('base','m2',m2);
assignin('base','g',g);
assignin('base','l',l);

end
```